COHOMOLOGIE L^2 DES VARIÉTÉS QALE

GILLES CARRON

Résumé. Nous donnons une interprétation topologique des espaces de formes harmoniques L^2 de certaines des variétés QALE introduites par D. Joyce. Nous introduisons pour cela un critère analytique qui nous permet d'utiliser des bouts de suites exactes de Mayer-Vietoris.

1. Introduction

Sur une variété riemannienne compacte, le célèbre théorème de Hodge et de Rham identifie les espaces de formes harmoniques L^2 aux groupes de cohomologie réels de la variété. Lorsque (X, g) est une variété complète et non compacte, ses espaces de formes harmoniques L^2

$$\mathcal{H}^k(X) = \left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*X), d\alpha = d^*\alpha = 0\right\}$$

peuvent être identifiés aux espaces de L^2 cohomologie réduite :

$$\mathcal{H}^k(X) \simeq \mathbb{H}^k(X) = \left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*X), d\alpha = 0\right\} / \overline{\left\{d\alpha, \alpha \in L^2(\Lambda^{k-1}T^*X), d\alpha \in L^2\right\}}$$

où l'adhérence est prise pour la topologie L^2. Cependant cette cohomologie L^2 réduite n'est pas en général pratique à calculer, car elle ne vérifie pas les suites exactes de Mayer-Vietoris. La cohomologie L^2 non réduite définie par

$${}^{nr}\mathbb{H}^k(X) = \left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*X),\ d\alpha = 0\right\} / \left\{d\alpha, \alpha \in L^2(\Lambda^{k-1}T^*X),\ d\alpha \in L^2\right\}$$

peut se calculer à l'aide de suites exactes de Mayer Vietoris, cependant ces espaces ne coïncident que lorsque l'image de d est fermée et dans le cas contraire les espaces de cohomologie L^2 non réduite sont de dimension infinie : ils ne permettent pas de récupérer la cohomologie L^2 réduite.

De nombreux travaux donnent une interprétation topologique de ces espaces de cohomologie L^2 réduite en fonction de la topologie et de la géométrie à l'infini. Par exemple, dans [1], M. Atiyah, V. Patodi et I. Singer calculent la cohomologie L^2 réduite des variétés à bouts cylindriques, les travaux de A. Borel, B. Casselman, E. Looijenga, L. Saper, M. Stern et S. Zucker ont permis d'identifier la cohomologie L^2 des variétés hermitiennes localement symétriques [1] à la cohomologie d'intersection de leurs compactifications de Borel-Serre-Satake ([3, 4, 24, 35, 40, 41]), les variétés à courbure négative ou asymptotiquement nulle ont aussi fait l'objet de nombreux travaux ([25, 27, 29, 39, 9]).

Récemment, A. Sen a utilisé une dualité issue de la M-théorie pour prédire l'existence de formes harmoniques L^2 sur l'espace réduit des monopoles de charges k

Date: 18 janvier 2005.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 58A14 ; Secondary 58J10.
Key words and phrases. L^2 cohomology, crepant resolution.

[1]dans ce cas l'image de d est fermée et cohomologie L^2 réduite et non réduite coïncident.

sur $\mathbb{R}^3$ ([37]). Grâce à des arguments également issus de la physique théorique, il existe aujourd'hui de nombreuses prédictions concernant les espaces de formes harmoniques L^2 sur certaines variétés riemanniennes complètes à holonomie exceptionnelle. Dans un papier remarquable, N. Hitchin montre qu'une variété hyperkählerienne complète de dimension réelle $4d$ obtenue par réduction hyperkählerienne de $\mathbb{R}^{4n}$ ne peut porter de formes harmoniques L^2 qu'en degré $2d$ [16] ; pour cela il utilise une amélioration due à J.Jost et K.Zuo ([21]) d'un résultat de M. Gromov ([14] cf. aussi [6, 26]). N. Hitchin détermine aussi les formes harmoniques L^2 de certaines de ces variétés dont l'espace réduit des monopoles de charge 2 et il vérifie dans ce cas les prédictions de A. Sen. En fait les travaux de G. Segal et A. Selby montrent les prédictions de A. Sen équivalent à démontrer que pour ces variétés la cohomologie L^2 réduite est isomorphe à l'image de la cohomologie à support compact dans la cohomologie absolue ([36]). Un travail fondamental de T. Hausel, E. Hunsicker, R. Mazzeo interprète les espaces de cohomologie L^2 réduite des variétés dont la géométrie à l'infini est de type "fibred boundary" (à bord fibré) ou " fibred cusp (à pointe fibré) en terme de cohomologie d'intersection de la compactification obtenue en écrasant les fibres de la fibration à l'infini ([15]). Ces géométries introduites par R. Mazzeo et R. Melrose modélisent les variétés localement symétrique de $\mathbb{Q}$-rang 1 et certaines géométries (ALE, ALF, ALG) des variétés à holonomie exceptionnelle ([28]) et ce travail leurs permet de confirmer ou d'infirmer certaines des prédictions issues de physique théorique (cf. la septième partie de [15] pour plus de précisions).

L'objet de ce travail est la classe de variétés à holonomie $\mathrm{SU}(n)$ ou $\mathrm{Sp}(n/2)$ construite par D. Joyce (théorème 9.3.3 de [22]) :

Théorème A. *Soit $G \subset \mathrm{SU}(n)$ un sous groupe fini et $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n/G$ une résolution crépante de $\mathbb{C}^n/G$, si X porte une métrique kählerienne QALE asymptote à $\mathbb{C}^n/G$ alors elle porte aussi une métrique Kähler-Einstein plate ; de plus si $G \subset \mathrm{Sp}(n/2)$ alors cette métrique est hyperkählerienne.*

Nous ne donnons pas la définition de résolution crépante (cf. [22] page 126 par exemple), nous signalons uniquement qu'une telle résolution n'existe pas toujours. Nous dirons plus loin deux mots sur la géométrie des variétés QALE (Quasi-Asymptotiquement Localement Euclidienne). Certaines de ces résolutions comme les schémas de Hilbert sur $\mathbb{C}^2$ sont aussi connues sous le nom d'espace des instantons non commutatifs ([33, 32]). Notre résultat principal est le suivant :

Théorème B. *Soit $G \subset \mathrm{SU}(n)$ un sous groupe fini, on suppose que $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ le quotient de la sphère par G soit à singularités isolées. Si $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n/G$ une résolution crépante de $\mathbb{C}^n/G$ équipée d'une métrique QALE asymptote à $\mathbb{C}^n/G$ alors*

$$\mathbb{H}^k(X) \simeq \mathrm{Im}\left(H^k_c(X) \to H^k(X) \right).$$

Les travaux de Y. Ito et M. Reid, V. Batyrev, J. Denef et F. Loeser permettent de décrire la cohomologie usuelle de X à l'aide des classes de conjugaison de G (([20, 2, 13]). Notons $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison de G, en corollaire de ce théorème nous obtenons :

Corollaire 1.1. *Soit $G \subset \mathrm{SU}(3)$ ou $G \subset \mathrm{Sp}(2)$ un sous groupe fini et $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n/G$ une résolution crépante de $\mathbb{C}^n/G$ équipée d'une métrique QALE asymptote à $\mathbb{C}^n/G$,* *alors :*

$$\chi_{L^2}(X) = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \dim \mathbb{H}^k(X) = \sum_{l=0}^{n} \dim \mathbb{H}^{2l}(X)$$
$$= \mathrm{card}\left\{[g] \in \mathcal{C}(G), \ker(g - \mathrm{Id}) = \{0\}\right\}.$$

En particulier, nous démontrons que l'espace des formes harmoniques L^2 de $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{C}^2)$ est de dimension 1 et qu'il est formé de formes de degré 4. Notre théorème répond par l'affirmative à une question de E. Hunsicker. Lorsque G agit sans point fixe sur $\mathbb{S}^{2n-1}$ alors X est une variété ALE : au dehors de $\pi^{-1}\{0\}$, X est quasi isométrique au bout de cône $\{z \in \mathbb{C}^n, \|z\| \geq 1\}/G$ et dans ce cas ce théorème B est déjà connu ([31, 7]).

Décrivons rapidement la géométrie à l'infini des variétés QALE considérées ici : nous supposons donc que $G \subset \mathrm{SU}(n)$ soit un sous groupe fini et que $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ soit à singularités isolées. Notons $S \subset \mathbb{S}^{2n-1}/G$ ce lieu singulier ; c'est le quotient par G d'une réunion de sphères. Si (X, g) est une variété QALE asymptote à $\mathbb{C}^n/G$ alors au dehors d'un compact $K \subset X$,

$$X \setminus K = \cup_{i=0}^{l} E_i$$

où E_0 est quasi-isométrique à un bout cône sur $(\mathbb{S}^{2n-1}/G) \setminus S^\varepsilon$ où S^ε est un ε voisinage de $S \subset \mathbb{S}^{2n-1}/G$ et chaque E_i a un revêtement fini quasi isométrique à

$$\{(y, v) \in Y_i \times V_i,\ 1 \leq \|v\|, \|\pi_i(y)\| \leq 2\varepsilon\}$$

où $V_i \subset \mathbb{C}^n$ est un sous espace vectoriel, $A_i = \{g \in G, g|_{V_i} = \mathrm{Id}\} \neq \{\mathrm{Id}\}$ et $\pi_i : Y_i \to V_i^\perp/A_i$ est une résolution de $V_i^\perp/A_i$ équipée d'une métrique ALE asymptote à $V_i^\perp/A_i$.

L'outil important introduit ici est une suite de Mayer-Vietoris entre cohomologie L^2 à poids réduite. Pour alléger les discours on introduit la définition suivante :

Soit (X, g) une variété riemannienne (non nécessairement complète) et μ, w des fonctions strictement positives (lisses) sur X, on suppose de plus que w est bornée. On peut définir la cohomologie à poids :

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) = \left\{\alpha \in L^2_\mu(\Lambda^k T^*X), d\alpha = 0\right\} / \overline{\left\{d\alpha, \alpha \in L^2_\mu(\Lambda^{k-1}T^*X), d\alpha \in L^2_\mu\right\}}$$

où l'adhérence est prise pour la topologie L^2_μ associée à la mesure $\mu d\,\mathrm{vol}_g$. On note aussi $\mathcal{D}^{k-1}_\mu(d) = \left\{d\alpha, \alpha \in L^2_\mu(\Lambda^{k-1}T^*X), d\alpha \in L^2_\mu\right\}$ le domaine de d.

Définition 1.2. On dira que l'image de $d : \mathcal{D}^{k-1}_\mu(d) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ est **presque fermée** (en degré k et par rapport à w) si lorsqu'on introduit l'espace

$$\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) = \{\alpha \in L^2_{w\mu}(\Lambda^{k-1}T^*X), d\alpha \in L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)\}$$

alors l'image de $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ est fermée et son image est exactement $\overline{d\mathcal{D}^{k-1}_\mu(d)} = \overline{\left\{d\alpha, \alpha \in L^2_\mu(\Lambda^{k-1}T^*X), d\alpha \in L^2_\mu\right\}}$.

Cette notion de "presque fermeture" de l'image de d est très pratique car elle permet d'obtenir des suites de Mayer-Vietoris :

Théorème C. *Si $X = U \cup V$ ($U, V \subset X$ ouverts de X), on suppose que l'image de d est presque fermée (en degré k et par rapport à w) sur X, U, V et $U \cap V$ et que*

$$\{0\} \to \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \xrightarrow{r^*} \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(V) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U \cap V) \to \{0\}$$

alors la suite exacte courte suivante est vérifiée :

$$\mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(U)\oplus\mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(V) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(U\cap V) \xrightarrow{b} \mathbb{H}^{k}_{\mu}(X) \xrightarrow{r^*} \mathbb{H}^{k}_{\mu}(U)\oplus\mathbb{H}^{k}_{\mu}(V) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^{k}_{\mu}(U\cap V).$$

Cette suite exacte permet en principe de déterminer $\mathbb{H}^k_\mu(X)$ lorsqu'on connaît les autres espaces et les différentes flèches de cette suite exacte.

Grâce à un résultat de L. Hörmander ([17]) et à nos précédents travaux sur la non parabolicité à l'infini, nous obtiendrons :

Théorème D. *Soit (X,g) une variété riemannienne complète et w une fonction strictement positive lisse bornée sur X (vérifiant 3.2), nous notons $d^*_w = w^{-1}d^*w$ l'adjoint formel de l'opérateur $d : L^2_w(\Lambda^{k-1}T^*X) \to L^2_w(\Lambda^kT^*X)$ alors il existe un compact $K \subset X$ telle que*

$$\forall \varphi \in C^\infty_0(\Lambda^{k-1}T^*(X \setminus K)), \|\varphi\|_{L^2_w} \le C\,[\|d^*_w\varphi\|_{L^2} + \|d\varphi\|_{L^2}]$$

si et seulement si les images de $d : \mathcal{C}^{k-2}_{w,w}(X) \to L^2_w(\Lambda^{k-1}T^*X)$ et de $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(X) \to L^2(\Lambda^kT^*X)$ sont fermées et si $\dim \mathbb{H}^{k-1}_w(X) < \infty$.

Ceci est à rapprocher de la définition que nous avions introduite dans [8] et utilisée dans [9] pour déterminer la cohomologie L^2 réduite des variétés plates au dehors d'un compact :

Définition 1.3. Soit (X,g) une variété riemannienne *complète*, on dit que l'opérateur $d+d^*$ est non parabolique à l'infini s'il existe un compact $K \subset X$ tel que pour tout ouvert borné U de $X \setminus K$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in C^\infty_0(\Lambda^\bullet T^*(X \setminus K)),\ C\|\varphi\|_{L^2(U)} \le \|(d+d^*)\varphi\|.$$

Décrivons maintenant l'organisation de ce papier : dans une première partie, on rappelle les définitions des espaces de cohomologie L^2 à poids, dans une deuxième partie nous décrivons notre critère de presque fermeture de l'image de d et nous y donnons des conditions pour que l'image de d soit presque fermée sur $U \cup V$ lorsqu'elle l'est sur U, V et $U \cap V$ et pour qu'elle soit presque fermée sur U lorsqu'elle l'est sur $U \cup V$ et $U \cap V$. On compare aussi cette condition à la non parabolicité à l'infini et nous montrerons le théorème D. On calcule ensuite la cohomologie L^2 réduite des cônes et à titre d'illustration nous reprouvons un résultat de R. Melrose ([31]) à propos de la cohomologie L^2 des variétés à bouts coniques. On décrit ensuite la géométrie des variétés QALE. Enfin dans la dernière partie nous prouvons notre résultat principal (le théorème B), en fait notre méthode permet aussi de déterminer la cohomologie L^2 des variétés QALE asymptote à $\mathbb{C}^n/G$ (où $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ est à singularités isolées) et pas seulement des résolutions crépantes. La description de ces variétés faite plus haut implique qu'il y a un compact K sur lequel la variété X se rétracte. Et le bord de K est une résolution de $\mathbb{S}^{2n-1}/G$. Les singularités de $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ sont de la forme $(\mathbb{C}^{m_i}/A_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})/B_i$ où $A_i \subset \mathrm{SU}(m_i)$ agit sans points fixes sur $\mathbb{C}^{m_i} \setminus \{0\}$, B_i agit sans point fixe sur $\mathbb{C}^{m_i}/A_i \setminus \{0\}$ et sur $\mathbb{S}^{2n_i-1}$; ces singularités sont résolus par $\big(Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}\big)/B_i$. Notons $Y = \cup_i Y_i/B_i$, on dispose d'une application $f : Y \to \partial K$, on peut considérer le sous complexe de $C^\infty(\Lambda^kT^*K)$ formé par les formes différentielles dont le tiré en arrière par f est nulle et on note $H^*(K, \ker f^*)$ la cohomologie de ce complexe : un cas particulier de notre résultat est le suivant

Théorème E. *Soit $G \subset \mathrm{SU}(n)$ et (X, g) une variété QALE asymptote à $\mathbb{C}^n/G$ on suppose que $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ est à singularités isolées et que la dimension réelle de ces singularités est plus grande ou égale à trois alors*

$$\mathbb{H}^k(X) \simeq \begin{cases} H^k(K, \partial K) \simeq H^k_c(X) & \text{si } k \leq 2 \\ H^k(K, \ker f^*) & \text{si } k \in [3, 2n-2] \\ H^k(K) \simeq H^k(X) & \text{si } k \geq 2n-2 \end{cases}$$

Remerciements. Je tiens à remercier C. Sorger pour avoir répondu patiemment à mes questions naïves sur la cohomologie des résolutions crépantes. Je remercie Eugenie Hunsicker dont les commentaires sur une version précédente de ce papier m'ont permis d'y repérer une erreur ; je la remercie également avec T. Hausel et R. Mazzeo et l' A.I.M. pour avoir organisé et accueilli la conférence "L^2 Harmonic Forms in Geometry and Physics" au cours de laquelle cette question a été soulevée. Enfin, ce travail a débuté alors que je bénéficiais d'une délégation partielle au C.N.R.S.

2. L^2 cohomologie (à poids).

Nous présentons ici les espaces de cohomologie L^2, on trouvera d'autres présentations dans les articles de J. Cheeger, S. Zucker, J. Lott ([11, 40, 25] et de façon plus abstraite dans le papier de J. Brüning et M. Lesch ([5]) .

Si (X, g, μ) est une variété riemannienne équipée d'une mesure lisse $\mu(x) d\,\mathrm{vol}_g(x)$ (ou même seulement dans L^∞_{loc}), on introduit l'espace $L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ des formes différentielles qui sont de carré sommables pour cette mesure, la norme de cet espace de Hilbert est :

$$\|\alpha\|^2_\mu = \int_X |\alpha|^2 \mu d\,\mathrm{vol}\,.$$

On note $\langle\ ,\ \rangle_\mu$ le produit scalaire associé.

L'espace des k-formes L^2_μ fermées est l'espace $Z^k_\mu(X)$ des formes $\alpha \in L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ qui sont fermées au sens des distributions, i.e. celle qui vérifie :

$$\forall \beta \in C^\infty_0(\Lambda^{k+1}T^*X),\ \langle \alpha, d^*_\mu \beta\rangle_\mu = 0.$$

Où d^*_μ est l'adjoint différentiel formel de l'opérateur

$$d\,:\, C^\infty_0(\Lambda^k T^*X) \to L^2_\mu(\Lambda^{k+1}T^*X)\ ;$$

si la variété X est orientée et si $*$ est l'opérateur de Hodge on a

$$d^*_\mu = \pm \mu^{-1} * d * \mu$$

le signe étant fonction du degré. Lorsque $\mu = 1$, on ne mentionnera pas la référence à la fonction μ : on notera $L^2_1 = L^2$, $d^* = d^*_1$...

Le domaine (maximal) de d est

$$\mathcal{D}^k_\mu(d) = \{\alpha \in L^2_\mu(\Lambda^k T^*X),\ d\alpha \in L^2_\mu(\Lambda^{k+1}T^*X)\}.$$

C'est à dire $\alpha \in \mathcal{D}^k_\mu(d)$ si et seulement si $\alpha \in L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ et s'il y a une constante C tel que

$$\forall \varphi \in C^\infty_0(\Lambda^{k+1}T^*X),\ |\ \langle \alpha, d^*_\mu \varphi\rangle_\mu\ | \leq C\|\varphi\|_\mu.$$

Maintenant on fait l'hypothèse suivante :

(2.1)
$$\begin{gathered}\text{La variété } X \text{ est l'intérieur d'une variété à coins } \bar{X} \text{ et la métrique } g\\ \text{et le poids } \mu \text{ s'étendent à } \bar{X} \text{ et } \bar{X} \text{ est complet pour la distance géodésique.}\end{gathered}$$

On note alors $C_0^\infty(\Lambda^k T^*X)$ l'espace des formes différentielles lisses et à support compacte dans X et $C_0^\infty(\Lambda^k T^*\bar{X})$ l'espace des formes différentielles lisses et à support compacte dans $\bar{X}$ c'est à dire celle dont le support est borné dans (X,g). Avec cette hypothèse, $C_0^\infty(\Lambda^k T^*\bar{X})$ est dense dans $\mathcal{D}_\mu^k(d)$ lorsque ce dernier espace est équipé de la norme
$$\alpha \mapsto \|\alpha\|_\mu + \|d\alpha\|_\mu.$$
La L^2_μ-cohomologie non réduite de (X,g,μ) est définie par
$$^{nr}\mathbb{H}^k_\mu(X) = Z^k_\mu(X)/d\mathcal{D}^{k-1}_\mu(d).$$
La L^2 cohomologie non réduite est la cohomologie d'un complexe mais lorsque l'image de d n'est pas fermée ce n'est pas un espace de Hilbert, c'est pourquoi on introduit la L^2_μ-cohomologie réduite :
$$\mathbb{H}^k_\mu(X) = Z^k_\mu(X)/\overline{d\mathcal{D}^{k-1}_\mu(d)} = Z^k_\mu(X)/\overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*\bar{X})}.$$
On notera $B^k_\mu(X) = \overline{dC_0^\infty(\Lambda^k T^*\bar{X})}$ où l'adhérence est pris dans L^2_μ. Évidemment lorsque l'image de $d : \mathcal{D}^{k-1}_\mu(d) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ est fermée ces deux espaces coïncident. L'objet de cet article est la cohomologie L^2 réduite, pour alléger le discours on omettra de signaler l'adjectif réduite.

La cohomologie L^2_μ se représente par des espaces de formes harmoniques. On introduit le domaine de d^*_μ, ou plus exactement de l'adjoint de $d : \mathcal{D}^{k-1}_\mu(d) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$: lorsque $\alpha \in L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ alors $\alpha \in \mathcal{D}^k(d^*_\mu)$ si et seulement s'il y a une constante C telle que
$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*\bar{X}),\ \mid \langle \alpha, d\varphi\rangle_\mu \mid \le C\|\varphi\|_\mu.$$

Lorsque $\alpha \in C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*\bar{X})$ alors $\alpha \in \mathcal{D}(d^*_\mu)$ si et seulement si le long de la partie lisse du bord de $\bar{X}$, α n'a pas de composante tangentielle.
Lorsque $\mathcal{D}^k(d^*_\mu)$ est équipée de la norme du graphe
$$\alpha \mapsto \|\alpha\|_\mu + \|d^*_\mu\alpha\|_\mu$$
alors $C_0^\infty(\Lambda^k T^*X)$ est dense dans $\mathcal{D}^k(d^*_\mu)$. On introduit donc :
$$\mathcal{H}^k_\mu(X) = \left\{\alpha \in Z^k_\mu(\Lambda^k T^*X),\ \alpha \in \mathcal{D}(d^*_\mu) \text{ et } d^*_\mu\alpha = 0\right\}.$$
La décomposition de Hodge-deRham nous apprend que :
$$\begin{aligned} L^2_\mu(\Lambda^k T^*X) &= \mathcal{H}^k_\mu(X) \oplus B^k_\mu(\Lambda^k T^*X) \oplus \overline{d^*_\mu\mathcal{D}^{k+1}(d^*_\mu)}\\ &= \mathcal{H}^k_\mu(X) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*\bar{X})} \oplus \overline{d^*_\mu C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*X)}\end{aligned}$$

l'adhérence étant bien entendu prise pour la topologie de $L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ et on sait de plus que
$$Z^k_\mu(X) = \mathcal{H}^k_\mu(X) \oplus B^k_\mu(\Lambda^k T^*X).$$

Donc on en déduit l'isomorphisme :

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) \simeq \mathcal{H}^k_\mu(X).$$

On peut aussi définir la L^2_μ cohomologie relative (à $\partial\bar{X}$ ou à $Y \subset \partial\bar{X}$ une hypersurface de $\bar{X}$) en considérant l'espace $\mathcal{D}^k_\mu(d, Y)$ des formes $\alpha \in L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ pour lesquelles il existe une constante C telle que

$$\forall\varphi \in C^\infty_0(\Lambda^{k+1}T^*(X \cup Y)),\ \ |\left\langle \alpha, d^*_\mu\varphi\right\rangle_\mu| \leq C\|\varphi\|_\mu.$$

On définit alors

$$Z^k_\mu(X, Y) = \left\{\alpha \in \mathcal{D}^k_\mu(d, Y),\ d\alpha = 0\right\}$$

et

$$B^k_\mu(X, Y) = \overline{d\mathcal{D}^{k-1}_\mu(d, Y)}.$$

$$\mathbb{H}^k_\mu(X, Y) = Z^k_\mu(X, Y)/B^k_\mu(X, Y).$$

Ces espaces admettent aussi une interprétation en terme de formes harmoniques : on introduit pour cela l'espace $\mathcal{D}^k_\mu(d^*_\mu, Y)$ des formes $\alpha \in L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ pour lesquelles il existe une constante C telle que,

$$\forall\varphi \in C^\infty_0(\Lambda^{k+1}T^*(\bar{X} \cup Y)),\ \ |\left\langle \alpha, d\varphi\right\rangle_\mu| \leq C\|\varphi\|_\mu\ .$$

Si on définit

$$\mathcal{H}^k(X, Y) = \{\alpha \in Z^k_\mu(X, Y) \cap \mathcal{D}^k_\mu(d^*_\mu, Y),\ d^*_\mu\alpha = 0\}$$

alors nous avons l'isomorphisme

$$H^k_\mu(X, Y) \simeq \mathcal{H}^k_\mu(X, Y).$$

Lorsque X est orientée[2], l'opérateur $*$ de Hodge induit un isomorphisme :

$$H^k_\mu(X) \simeq H^{n-k}_{\mu^{-1}}(X, \partial X).$$

Remarque 2.1. On peut aussi introduire comme implicitement L. Hörmander [17, 18] et plus explicitement N. Teleman [38] la $L^2_{\rm loc}$-cohomologie. C'est la cohomologie du complexe des formes différentielles qui sont dans $L^2_{\rm loc}$ ainsi que leur différentielle. Selon la proposition 3.3 [38], la cohomologie de ce complexe calcule la cohomologie de X (la cohomologie de de Rham). La dualité de Poincaré dit que la cohomologie de X est isomorphe au dual de la cohomologie à support compact, en particulier il n'y a pas lieu de distingué la L^2_{loc} cohomologie réduite ou non réduite car l'image de d est fermée sur $L^2_{\rm loc}$. En effet, une forme fermée L^2_{loc} nulle en cohomologie $L^2_{\rm loc}$ réduite est exacte en restriction à chaque domaine compact à bord lisse de X, elle définit donc une forme linéaire nulle sur la cohomologie à support compact, elle est donc exacte en cohomologie $L^2_{\rm loc}$. Aussi une forme fermée de L^2_μ nulle en cohomologie L^2_μ réduite est nulle en cohomologie $L^2_{\rm loc}$ en particulier elle est la différentielle d'une forme dans $L^2_{\rm loc}$. De plus lorsque $\bar{X}$ est compacte alors la L^2_μ cohomologie (qui est évidemment isomorphe à la $L^2_{\rm loc}$ cohomologie) est isomorphe à la cohomologie de X.

[2]Lorsque X n'est pas orientée, un résultat analogue est valide en considérant les formes à valeurs dans le fibré d'orientation.

3. La condition de presque-fermeture de l'image de d et la suite de Mayer-Vietoris

On introduit maintenant une condition qui permet d'obtenir un petit bout de suite exacte de Mayer-Vietoris.

3.1. **Définition.** On considère donc (X, g, μ) une variété riemannienne équipée de la mesure $\mu(x) d\operatorname{vol}_g$ et $w : X \to]0, \infty[$ une fonction lisse bornée, on dira que

l'image de $d : \mathcal{D}_\mu^{k-1}(d) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ est **presque fermée** *(en degré k et par rapport à w) si lorsqu'on introduit l'espace*

$$\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) = \{\alpha \in L^2_{w\mu}(\Lambda^{k-1}T^*X), d\alpha \in L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)\}$$

$$\text{alors } B^k_\mu(X) = d\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X).$$

Lorsque (X, g, μ) vérifie l'hypothèse (2.1) alors ceci équivaut à ce que l'image de d : $\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ soit fermée. Dans ces conditions une forme L^2_μ fermée $\alpha \in Z^k_\mu(X)$ est nulle en cohomologie L^2_μ si et seulement si il existe $\beta \in L^2_{w\mu}(\Lambda^{k-1}T^*X)$ telle que $\alpha = d\beta$ [3]. Il est évident que lorsque l'image de d est fermée elle est presque fermée. Remarquons que lorsque $w' \le w$, alors

$$\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \subset \mathcal{C}^{k-1}_{w',\mu}(X) \ ;$$

ainsi si l'image de $d : \mathcal{D}^{k-1}_\mu(d) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ est presque fermée par rapport à w alors on a

$$B^k_\mu(X) \subset d\mathcal{C}^{k-1}_{w',\mu}(X),$$

mais on n'a pas forcément égalité. Dans (lemme 3.1 de [10]), nous avons obtenu un critère qui assure l'inclusion inverse (cf. aussi les articles de N. Hitchin, P. Li , J. Mc Neal, J. Jost et K. Zuo [16, 23, 26, 21]) :

Proposition 3.1. *Si (X, g, μ) vérifie (2.1) et si $w(x) \ge \frac{1}{\psi^2(d(o,x))}$ (où o est un point fixé de X) où la fonction ψ vérifie*

$$\int^\infty \frac{dt}{\psi(t)} = \infty$$

alors

$$d\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \subset B^k_\mu(X)$$

Définition 3.2. Lorsque w vérifiera les hypothèses de cette proposition on dira que w est à **décroissance parabolique**.

Un corollaire de ce résultat est donc le suivant :

Corollaire 3.3. *Si (X, g, μ) vérifie les hypothèses (2.1) et si l'image de $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ est fermée alors pour tout poids $w' \le w$ à décroissance parabolique, l'image de $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w',\mu}(X) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ est encore fermée.*

[3] au sens des distribution.

3.2. **Suite de Mayer-Vietoris.**

Théorème 3.4. *Si $X = U \cup V$ ($U, V \subset X$ ouverts de X) et $w : X \to]0, \infty[$ une fonction lisse, on suppose que l'image de d est presque fermée (en degré k et par rapport à w) sur X, U, V et $U \cap V$ et que*

$$\{0\} \to \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \xrightarrow{r^*} \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(V) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U \cap V) \to \{0\}$$

alors la suite suivante est exacte :

$$\mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(U) \oplus \mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(V) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(U \cap V) \xrightarrow{b} \mathbb{H}^{k}_{\mu}(X) \xrightarrow{r^*} \mathbb{H}^{k}_{\mu}(U) \oplus \mathbb{H}^{k}_{\mu}(V) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^{k}_{\mu}(U \cap V).$$

Démonstration. Si $A \subset B \subset X$ on note $\iota_{A,B}$ l'inclusion $\iota_{A,B} : A \to B$ et on note $W = U \cap V$.

Montrons l'exactitude de la dernière flèche i.e $\ker \delta = \operatorname{Im} r^*$: soit donc $(\alpha, \beta) \in Z^k_\mu(U) \oplus Z^k_\mu(V)$ telle que

$$\iota^*_{W,U}\alpha - \iota^*_{W,V}\beta \in B^k_\mu(W).$$

Il y a alors $\psi \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(W)$ tel que $\iota^*_{W,U}\alpha - \iota^*_{W,V}\beta = d\psi$ et par hypothèse il y a aussi $(\psi_U, \psi_V) \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(V)$ tel que $\iota^*_{W,U}\psi_U - \iota^*_{W,V}\psi_V = \psi$. Alors si γ est la k-forme L^2_μ sur X telle que

$$\iota^*_{U,X}\gamma = \alpha - d\psi_U \text{ et } \iota^*_{V,X}\gamma = \beta - d\psi_V$$

alors γ est fermée sur X et on a bien $\iota^*_{U,X}\gamma - \alpha \in B^k_\mu(U)$ et $\iota^*_{V,X}\gamma - \beta \in B^k_\mu(V)$.

On montre maintenant l'exactitude de la flèche du milieu i.e. $\ker r^* = \operatorname{Im} \mathrm{b}$. Rappelons comment b est défini, soit

$$\eta \in Z^{k-1}_{w\mu}(U \cap V) \subset \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U \cap V),$$

alors par hypothèse, on trouve $(\psi_U, \psi_V) \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(V)$ tel que

$$\eta = \iota^*_{W,U}\psi_U - \iota^*_{W,V}\psi_V$$

alors la forme φ définie sur X par : $\iota^*_U\varphi = d\psi_U$ et $\iota^*_V\varphi = d\psi_U$ est un élément de $Z^k_\mu(X)$, sa classe de cohomologie L^2_μ ne dépend pas que de la classe de $L^2_{w\mu}$ cohomologie de η, et alors

$$\mathrm{b}[\eta] = [\varphi].$$

Soit donc $\gamma \in Z^k_\mu(X)$ telle que

$$\iota^*_{U,X}\gamma \in B^k_\mu(U) \text{ et } \iota^*_{V,X}\gamma \in B^k_\mu(V),$$

on trouve donc $(\psi_U, \psi_V) \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(V)$ tel que : $\iota^*_{U,X}\gamma = d\psi_U$ et $\iota^*_{V,X}\gamma = d\psi_V$. Alors $\iota^*_{W,U}\psi_U - \iota^*_{W,V}\psi_V \in Z^{k-1}_{w\mu}(W)$, et évidemment on a

$$\mathrm{b}[\iota^*_{W,U}\psi_U - \iota^*_{W,V}\psi_V] = [\gamma].$$

On montre finalement l'exactitude de la première flèche : c'est à dire $\operatorname{Im} \delta = \ker \mathrm{b}$. Soit donc $\eta \in Z^{k-1}_{w\mu}(W)$, tel que si on choisit $(\psi_U, \psi_V) \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(V)$ vérifiant $\eta = \iota^*_{W,U}\psi_U - \iota^*_{W,V}\psi_V$ alors la k-forme L^2 fermée γ définie par

$$\iota^*_{U,X}\gamma = d\psi_U \text{ et } \iota^*_{V,X}\gamma = d\psi_V$$

est nulle en cohomologie L^2_μ. Par hypothèse il existe $\phi \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X)$ telle que $\gamma = d\phi$. Mais alors on a $\alpha = \psi_U - \iota^*_{U,X}\phi \in Z^{k-1}_{w\mu}(U)$ et $\beta = \psi_V - \iota^*_{V,X}\phi \in Z^{k-1}_{w\mu}(V)$ d'où $\eta = \iota^*_{W,U}\alpha - \iota^*_{W,V}\beta$.

□

Remarques 3.5. i) On peut évidemment énoncer un théorème analogue pour la cohomologie L^2_μ relative à une hypersurface $Y \subset \partial X$ à condition d'introduire l'espace $\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X,Y)$ des formes $\alpha \in L^2_{w\mu}(\Lambda^{k-1}T^*X)$ telles qu'il existe une constante C avec

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*(X \cup Y)) \mid \langle \alpha, d_\mu^* \varphi \rangle_\mu \mid \leq C \|\varphi\|_\mu.$$

ii) La preuve indique aussi que pour avoir l'exactitude au niveau des deux dernières flèches, on a uniquement besoin que l'image de d soit presque fermée sur $U \cap V$, pour l'exactitude au niveau des deux flèches du milieu, il suffit que l'image de d soit presque fermée sur U et V et au niveau des deux premières flèche il suffit que l'image de d soit presque fermée sur X.

3.3. **Condition pour assurer la presque fermeture de l'image de d.** Si on découpe la variété en petits bouts sur lesquels l'image de d est presque fermée, il n'est pas clair que l'image de d soit presque fermée sur la variété ; voici une proposition qui assure ceci (c'est en quelque sorte un voyage de la cohomologie vers l'analyse fonctionnelle).

Proposition 3.6. *Soit (X,g) une variété riemannienne vérifiant (2.1) et μ, w, w' des fonctions strictement positives lisses sur $\bar{X}$. On suppose que $X = U \cup V$ ($U, V \subset X$ ouverts de X) et que les conditions suivantes sont vérifiées :*
- *l'image de d est presque fermée sur U et V par rapport au poids w.*
- *Le poids w est à décroissance parabolique.*
- $d\mathcal{C}^{k-2}_{w',w\mu}(U \cap V) = B^{k-1}_{w\mu}(U \cap V)$.
- $\mathcal{C}^{k-2}_{w',w\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-2}_{w',w\mu}(V) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{k-2}_{w',w\mu}(U \cap V) \to \{0\}$
- *la suite suivante $\mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(U) \oplus \mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(V) \to \mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(U \cap V) \xrightarrow{b} \mathbb{H}^k_\mu(X)$ est aussi exacte,*

alors l'image de d est presque fermée sur X par rapport au poids w.

Démonstration. Soit donc $\gamma \in B^k_\mu(X)$, évidemment on a aussi

$$\iota^*_{U,X}\gamma \in B^k_\mu(U) \text{ et } \iota^*_{V,X}\gamma \in B^k_\mu(V)$$

Il y a donc $(\psi_U, \psi_V) \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(V)$ tels que

$$\iota^*_{U,X}\gamma = d\psi_U \text{ et } \iota^*_{V,X}\gamma = d\psi_V.$$

On définit alors $\eta = \iota^*_{W,U}\psi_U - \iota^*_{W,V}\psi_V \in Z^{k-1}_{w\mu}(W)$ et cette forme vérifie par construction $b[\eta] = 0$. Il y a donc $\phi \in \mathcal{C}^{k-2}_{w',w\mu}(W)$ et $(\alpha_U, \alpha_V) \in Z^{k-1}_{w\mu}(U) \oplus Z^{k-1}_{w\mu}(V)$ tels que

$$\eta = d\phi + \iota^*_{W,U}\alpha_U - \iota^*_{W,V}\alpha_V.$$

Et on trouve aussi $(\phi_U, \phi_V) \in \mathcal{C}^{k-2}_{w',w\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-2}_{w',w\mu}(V)$ tels que

$$\iota^*_{W,U}\phi_U - \iota^*_{W,V}\phi_V = \phi.$$

Si $\psi \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X)$ est défini par

$$\iota^*_{U,X}\psi = \psi_U - d\phi_U - \alpha_U \text{ et } \iota^*_{V,X}\psi = \psi_V - d\phi_V - \alpha_V,$$

alors on a bien $\gamma = d\psi$. Ainsi, nous avons obtenu l'inclusion :

$$B^k_\mu(X) \subset d\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X).$$

L'inclusion réciproque est une conséquence du fait que w est à décroissance parabolique.

□

Nous avons bien évidemment un énoncé analogue pour la cohomologie L^2_μ relative à $Y \subset \partial X$.

On a aussi un critère qui assure que l'image de d est presque fermée sur U lorsqu'elle l'est sur X et $U \cap V$.

Proposition 3.7. *Soit (X, g) une variété riemannienne telle que (2.1) soit vérifiée à coins et μ, w des fonctions strictement positives lisses sur $\bar{X}$. On suppose que $X = U \cup V$ où U vérifie aussi (2.1). Les conditions suivantes*

- *L'image de d est presque fermée sur X et $U \cap V$ par rapport au poids w.*
- *Le poids w est à décroissance parabolique.*
- $\{0\} \to \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \xrightarrow{r^*} \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(V) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U \cap V) \to \{0\}$
- $\iota^*_{U,X} : \mathbb{H}^k_\mu(X) \to \mathbb{H}^k_\mu(U)$ *est injective*

impliquent que l'image de d est presque fermée sur U par rapport au poids w.

Démonstration. Soit $\alpha \in B^k_\mu(U)$ on a donc $\iota^*_{W,U}\alpha \in B^k_\mu(W)$ et on trouve de même $(\psi_U, \psi_V) \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-1}_{w\mu}(V)$ tels que $d\iota^*_{W,U}\psi_U - d\iota^*_{W,V}\psi_V = \iota^*_{W,U}\alpha$. Maintenant si $\gamma \in Z^k_\mu(X)$ est défini par

$$\iota^*_{U,X}\gamma = \alpha - d\psi_U \text{ et } \iota^*_{V,X}\gamma = -d\psi_V.$$

Alors γ est fermé et $\iota^*_{U,X}\gamma \in B^k_\mu(U)$ donc par hypothèse : $\gamma \in B^k_\mu(X)$ et on trouve $\phi \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X)$ tel que $\gamma = d\phi$, ainsi $\alpha = d\psi_U + d\iota^*_{U,X}\phi$. D'où l'inclusion

$$B^k_\mu(U) \subset d\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U).$$

L'inclusion réciproque est une conséquence du fait que w est à décroissance parabolique. □

Remarque 3.8. On remarque que l'on peut remplacer l'hypothèse que l'image de d est presque fermée sur X par l'hypothèse que si $\alpha \in B^k_\mu(X)$ alors il y a une forme $\beta \in L^2_{\text{loc}}$ tel que $\alpha = d\beta$ et $\iota^*_{U,X}\beta \in L^2_{w\mu}$.

La preuve de la proposition précédente montre même le résultat suivant :

Corollaire 3.9. *Si en plus des hypothèses précédentes, on a $\mathbb{H}^k_\mu(U \cap V) = \{0\}$, alors*

$$\mathbb{H}^k_\mu(U) \simeq \mathbb{H}^k_\mu(X).$$

3.4. **Comparaison avec la non parabolicité.** Dans [9], nous avons utilisé une condition similaire à la presque fermeture de l'image de d :

Définition 3.10. Soit (M, g) une variété riemannienne *complète*, on dit que l'opérateur $d + d^*_\mu$ est non parabolique à l'infini s'il existe un compact $K \subset M$ tel que pour tout ouvert borné U de $M \setminus K$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in C^\infty_0(\Lambda^\bullet T^*(M \setminus K)),\ C\|\varphi\|_{L^2(U)} \le \|(d + d^*_\mu)\varphi\|_\mu.$$

Soit $\tilde{K}$ un compact contenant K dans son intérieur, on note $W(\Lambda^\bullet T^*M)$ le complété de $C^\infty_0(\Lambda^\bullet T^*M)$ pour la norme :

$$\alpha \mapsto \|\alpha\|_{L^2(\tilde{K})} + \|(d + d^*_\mu)\varphi\|_\mu.$$

Cet espace ne dépend pas du compact $\tilde{K}$ choisi, il s'injecte donc naturellement dans $W^{1,2}_{loc}$. De plus l'opérateur $(d + d^*_\mu) : W(\Lambda^\bullet T^*M) \longrightarrow L^2_\mu(\Lambda^\bullet T^*M)$ est Fredholm et on a

$$B^k_\mu(M) = dW(\Lambda^{k-1}T^*M).$$

Si l'on fait l'hypothèse de coercivité suivante :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Lambda^\bullet T^*(M \setminus K)),\ C\|\varphi\|_{w\mu} \leq \|(d+d_\mu^*)\varphi\|_\mu\,,$$

alors l'opérateur $d+d_\mu^*$ est clairement non parabolique à l'infini et l'image de d est presque fermée sur M pour le poids w. Dans ce cas une norme sur l'espace $W(\Lambda^\bullet T^*M)$ est

$$\alpha \mapsto \|\varphi\|_{w\mu} + \|(d+d_\mu^*)\varphi\|_\mu.$$

Alors le noyau W de l'opérateur $d+d_\mu^*$ est le noyau $L^2_{w\mu}$ de l'opérateur $d+d_\mu^*$; et il y a donc une constante $C>0$ telle que si $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^\bullet T^*M)$ vérifie

$$\langle \varphi, h\rangle_{w\mu} = 0,\ \forall h \in \ker_{L^2_{w\mu}}(d+d_\mu^*)$$

alors

$$C\|\varphi\|_{w\mu} \leq \|(d+d_\mu^*)\varphi\|_\mu$$

L'avantage de cette définition est qu'elle ne dépend que de la géométrie à l'infini de M et qu'avec un peu d'analyse on peut obtenir une suite exacte longue en cohomologie L^2_μ. Mais ceci ne permet pas de découper la géométrie à l'infini en morceaux sur lesquels on ferait une analyse similaire. La condition de presque fermeture pour l'image de d est assez souple mais nous ne savons pas si elle ne dépend que de la géométrie à l'infini : par exemple si (X,g) est une variété riemannienne qui vérifie nos hypothèses (2.1) et μ une fonction lisse strictement positive sur $\bar X$. Soit $K \subset \bar X$ un compact, est-il vrai que la presque fermeture de l'image de d sur X implique la presque fermeture de l'image de d sur $X \setminus K$ (et vice versa) ? Notons par exemple que l'hypothèse de presque fermeture de l'image de d ne requiert pas la finitude de la dimension des espaces de L^2_μ cohomologie.

Lemme 3.11. *Supposons que (X,g,μ) vérifie la condition (2.1) et que w soit à décroissance parabolique, alors $C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*\bar X)$ est dense dans $\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X)$ lorsque ce dernier espace est équipé de la norme du graphe $\alpha \mapsto \|\alpha\|^2_{w\mu} + \|d\alpha\|_\mu$.*

Démonstration. C'est en fait une re-formulation du lemme (3.1) de [10]. Grâce aux hypothèses (2.1), il suffit de démontrer que si $\beta \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X)$, alors on peut trouver une suite $(\beta_l)_l$ d'élément $\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X)$ à support compact qui converge vers β.

Rappelons que w est à décroissance parabolique :

$$w(x) \geq \frac{1}{\psi^2(d(o,x))}$$

où o est un point fixé de X et ψ vérifie

$$\int^\infty \frac{dt}{\psi(t)} = \infty.$$

On introduit alors les fonctions de troncature de [10] : si r,R deux nombres réels tels que $0<r<R$, on leurs associe la fonction $\phi_{r,R}$ définie par

$$\phi_{r,R}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s \leq r \\ \int_s^R \frac{dt}{\psi(t)} \times \left(\int_r^R \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{-1} & \text{si} \quad s \in [r,R] \\ 0 & \text{si} \quad s \geq R \end{cases} \tag{3.1}$$

Il existe alors par hypothèse des suites $r_l < R_l$ telles que $\lim_{l\to\infty} r_l = \infty$ et

$$\left(\int_{r_l}^{R_l} \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{-1} \leq \frac{1}{l}\ ;$$

On considère alors $\beta_l = \phi_{r_l,R_l}(r(x))\beta$ où $r(x) = d(o,x)$. Il est clair que $\lim_{l\to\infty} \|\beta_l - \beta\|_{w\mu} = 0$. De plus puisque $d\beta_l = \phi_{r_l,R_l} d\beta + \phi'_{r_l,R_l} dr \wedge \beta$ et que par construction :

$$\|\phi'_{r_l,R_l} dr \wedge \beta\|_\mu \leq \frac{2}{l}\|\beta\|_{w\mu} ,$$

on déduit immédiatement que $\lim_{l\to\infty} \|d\beta_l - d\beta\|_\mu = 0$. □

Introduisons maintenant l'opérateur

$$T := \left(d : \mathcal{C}^{k-2}_{w,w\mu}(X) \to L^2_{w\mu}(\Lambda^{k-1}T^*X)\right)$$

et T^* son adjoint, le domaine de T^* est aussi l'espace $\mathcal{D}(T^*)$ des $(k-1)$-formes $\alpha \in L^2_{w\mu}$ telles que

$$\forall \phi \in C^\infty_0(\bar{X}), \quad \phi\alpha \in \mathcal{D}^{k-1}(d^*_{w\mu})$$

et telles que $d^*_{w\mu}\alpha \in L^2_\mu$. En utilisant que $d^*_{w\mu}\beta_l = \phi_{r_l,R_l} d^*_{w\mu}\beta - \phi'_{r_l,R_l} \operatorname{int}_{\nabla r} \beta$, une preuve identique montre que l'on a aussi :

Lemme 3.12. *Supposons que (X, g, μ) vérifie la condition (2.1) et que w soit à décroissance parabolique, alors $C^\infty_0(\Lambda^{k-1}T^*\bar{X}) \cap \mathcal{D}^{k-1}(d^*_{w\mu})$ est dense dans $\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \cap \mathcal{D}(T^*)$ lorsque ce dernier espace est équipé de la norme du graphe $\alpha \mapsto \|\alpha\|^2_{w\mu} + \|d\alpha\|_\mu + \|d^*_{w\mu}\alpha\|_\mu$.*

Grâce à ce dernier lemme, un théorème de L. Hörmander (théorème 1.1.2 de [17]) implique néanmoins le résultat suivant qui établit un premier lien entre les notions de non-parabolicité à l'infini et de presque-fermeture de l'image de d.

Théorème 3.13. *Soit (X, g) est une variété riemannienne orientée de dimension d qui vérifie nos hypothèses (2.1)et μ, w des fonctions lisses strictement positives sur $\bar{X}$ où w est à décroissance parabolique. Les images des applications*

$$d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$$

$$\text{et } d : \mathcal{C}^{k-2}_{w,w\mu}(X) \to L^2_{w\mu}(\Lambda^{k-1}T^*X)$$

sont fermées si et seulement si il y a une constante $C > 0$ telle que si $\varphi \in C^\infty_0(\Lambda^{k-1}T^*\bar{X}) \cap \mathcal{D}^{k-1}(d^*_{w\mu})$ vérifie

$$\langle \varphi, h\rangle_{w\mu} = 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}^{k-1}_{w\mu}(X)$$

alors

$$C\|\varphi\|^2_{w\mu} \leq \|d\varphi\|^2_\mu + \|d^*_{w\mu}\varphi\|^2_\mu$$

On peut aussi re-visiter une partie de nos travaux sur la non-parabolicité à l'infini à partir de cette inégalité. Nous remarquons que si en plus des hypothèses de ce théorème nous supposons que $\mathcal{H}^{k-1}_{w\mu}(X)$ est de dimension finie alors on trouve $K \subset \bar{X}$ un compact et C une constante strictement positive telle que

$$\forall \phi \in C^\infty_0(\Lambda^{k-1}T^*(\bar{X} \setminus K)) \cap \mathcal{D}^{k-1}(d^*_{w\mu}),$$
$$C\|\phi\|^2_{w\mu} \leq \|d\phi\|^2_\mu + \|d^*_{w\mu}\phi\|^2_\mu.$$

En effet si $\{h_1, ..., h_l\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}^{k-1}_{w\mu}(X)$, nous avons pour $\phi \in C^\infty_0(\Lambda^{k-1}T^*(\bar{X} \setminus K)) \cap \mathcal{D}^{k-1}(d^*_{w\mu})$

$$C\|\phi\|^2_{w\mu} \leq \|d\phi\|^2_\mu + \|d^*_{w\mu}\phi\|^2_\mu + C\sum_i |\langle \phi, h_i\rangle_{w\mu}|^2$$

Il suffit de choisir alors K afin que

$$\sum_i \|h_i\|^2_{L^2_{w\mu}(M\setminus K)} \le \frac{1}{10} \ .$$

Ce résultat s'accompagne en fait d'un réciproque :

Théorème 3.14. *Supposons en plus que w soit à décroissance parabolique et que pour un compact $K \subset \bar{X}$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} &\forall \phi \in C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*(\bar{X}\setminus K)) \cap \mathcal{D}^{k-1}(d^*_{w\mu}) \\ &C\|\phi\|^2_{w\mu} \le \|d\phi\|^2_\mu + \|d^*_{w\mu}\phi\|^2_\mu. \end{aligned} \tag{3.2}$$

alors l'image de d est presque fermée en degré k pour le poids w, $\mathcal{H}^{k-1}_{w\mu}(X)$ est de dimension finie et l'image de $d : \mathcal{C}^{k-2}_{w,w\mu}(X) \to L^2_{w\mu}(\Lambda^{k-1}T^*X)$ est aussi fermée.

Démonstration. On s'inspire largement de [8] : soit $\tilde{K}$ un compact contenant K dans son intérieur, on lui associe la norme $N_{\tilde{K}}$ définie sur $C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*\bar{X}) \cap \mathcal{D}^{k-1}(d^*_{w\mu})$ par

$$N_{\tilde{K}}(\phi) = \left(\int_{\tilde{K}} |\phi|^2 + \|d\phi\|^2_\mu + \|d^*_{w\mu}\phi\|^2_\mu\right)^{1/2} \ .$$

Cette norme est en fait équivalente à la norme :

$$N_w(\phi) = \left(\|\phi\|^2_{w\mu} + \|d\phi\|^2_\mu + \|d^*_{w\mu}\phi\|^2_\mu\right)^{1/2}.$$

En effet la norme N_w est à un facteur près plus grande que la norme $N_{\tilde{K}}$, il suffit donc de montrer l'estimation réciproque. Soit donc ρ une fonction qui vaut 1 dans un voisinage de $X\setminus\tilde{K}$ et à support dans $X\setminus K$. Si $\phi \in C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*\bar{X})\cap\mathcal{D}^{k-1}(d^*_{w\mu})$, on a

$$\begin{aligned} \|\phi\|^2_{w\mu} &\le 2\|(1-\rho)\phi\|^2_{w\mu} + 2\|\rho\phi\|^2_{w\mu} \\ &\le C\int_{\tilde{K}} |\phi|^2 + C\left[\|d(\rho\phi)\|^2_\mu + \|d^*_{w\mu}(\rho\phi)\|^2_\mu\right] \\ &\le C\int_{\tilde{K}} |\phi|^2 + C\left[\|d\phi\|^2_\mu + \|d^*_{w\mu}\phi\|^2_\mu\right] \end{aligned}$$

Où on a utilisé d'abord l'inégalité de non parabolicité (3.2) et ensuite que

$$\|d(\rho\phi)\|^2_\mu + \|d^*_{w\mu}(\rho\phi)\|^2_\mu \le C\int_{\tilde{K}} |\phi|^2 + C\left[\|d\phi\|^2_\mu + \|d^*_{w\mu}\phi\|^2_\mu\right]$$

Soit donc W le complété de $C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*\bar{X}) \cap \mathcal{D}^{k-1}(d^*_{w\mu})$ pour la topologie induite par ces normes. Nous allons montrer que l'opérateur

$$(d + d^*_{w\mu}) \, : \, W \longrightarrow L^2_\mu(\Lambda^k T^*X) \oplus L^2_\mu(\Lambda^{k-1}T^*X)$$

est semi-Fredholm : son noyau est de dimension finie et son image est fermée.

Grâce au critère très commode de L. Hörmander (prop. 19.1.3 de [19]), il suffit pour cela de montrer que si $\{\alpha_l\}_l$ converge faiblement dans W et que $\{(d+d^*_{w\mu})\alpha_l\}_l$ converge fortement dans L^2_μ alors la suite $\{\alpha_l\}_l$ converge fortement dans W.

Il suffit donc de démontrer qu'une telle suite converge fortement dans $L^2(\Lambda^{k-1}T^*\tilde{K})$. Mais par hypothèse une telle suite est bornée dans $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ et converge faiblement dans $W^{1,2}_{loc}$, puisque l'inclusion de $W^{1,2}_{loc}$ dans $L^2(\tilde{K})$ est compacte, le résultat est immédiat. On vient de démontrer que l'image de $d \, : \, W \longrightarrow L^2_\mu$ est fermée. Grâce au lemme 3.12, on en déduit que les opérateurs $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \to L^2_\mu$ et T^* ont leurs images fermées, c'est donc aussi le cas de T.

On montre maintenant que $\mathcal{H}^{k-1}_{w\mu}(X)$ est de dimension finie, on sait que $ker_W(d + d^*_{w\mu}) \subset \mathcal{H}^{k-1}_{w\mu}(X)$. On va vérifier que ces deux espaces coïncident. Soit $h \in \mathcal{H}^{k-1}_{w\mu}(X)$, on veut montrer que h est dans W, il faut donc trouver une suite $(h_l)_l$ de $C^\infty_0(\Lambda^{k-1}T^*\bar{X}) \cap \mathcal{D}^{k-1}(d^*_{w\mu})$ telle que $\|dh_l\|_\mu \to 0$ et $\|d^*_{w\mu}h_l\|_\mu \to 0$. On reprend les fonction de troncature (3.1), et on considère alors $h_l = \phi_{r_l,R_l}(r(x))h$ où $r(x) = d(o,x)$. On a $dh_l = \phi'_{r_l,R_l}dr \wedge h$ et $d^*_{w\mu}h_l = -\phi'_{r_l,R_l}\operatorname{int}_{\nabla r} h$ on obtient donc

$$\|dh_l\|_\mu + \|d^*_{w\mu}h_l\|_\mu \leq \frac{2}{l}\|h\|_{w\mu}$$

d'où le résultat. □

La conclusion de cette discussion est donc la suivante :

Théorème 3.15. *Lorsque (X, g, μ) vérifie (2.1) et que w est à décroissante parabolique, la conjonction des trois conditions suivantes ne dépend que de la géométrie à l'infini de (X, g, μ) :*

(1) *La dimension de $\mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(X)$ est finie.*

(2) *L'image de $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ est fermée.*

(3) *L'image de $d : \mathcal{C}^{k-2}_{w,w\mu}(X, \partial X) \to L^2_{w\mu}(\Lambda^{k-1}T^*X)$ est fermée.*

Et elles équivalent à l'existence d'un compact $K \subset \bar{X}$ tel que :

$$\forall \phi \in C^\infty_0(\Lambda^{k-1}T^*(\bar{X} \setminus K)) \cap \mathcal{D}^{k-1}(d^*_{w\mu})$$
$$C\|\phi\|^2_{w\mu} \leq \|d\phi\|^2_\mu + \|d^*_{w\mu}\phi\|^2_\mu.$$

On peut également énoncer un résultat analogue relativement à $Y \subset \partial X$.

3.5. On donne maintenant le critère qui plus loin nous permettra d'affirmer que la suite

$$\{0\} \to \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \xrightarrow{\mathrm{r}^*} \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U) \oplus \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(V) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U \cap V) \to \{0\}$$

est exacte.

Proposition 3.16. *Si $X = U \cup V$ où $\partial V \cap U \subset \Omega$ où Ω est quasi isométrique au bout de cône sur $]-1,1[\times\Sigma$: $\Omega \simeq C_1(]-1,1[\times\Sigma)$. On suppose que $\partial V \cap U = C_1(\{0\} \times \Sigma)$ et $V \cap \Omega = C_1(]-1,0[\times\Sigma)$. On considère un poids μ qui est radiale sur Ω et des poids $w, \bar{w}, \rho$ tels que si on note r la variable radiale sur Ω alors en restriction à Ω : $w = r^{-2}(1 + \log(r))^{-2}$, $\rho = (1 + \log(r))^{-2}$ et $\bar{w} = r^{-2}$. Alors on a*

$$\mathcal{C}^{k-1}_{\bar{w},\mu}(U) \overset{\iota^*_{U\cap V,U}}{\longrightarrow} \mathcal{C}^{k-1}_{\bar{w},\mu}(U \cap V) \to \{0\}$$

et également pour tout $\psi \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U \cap V)$, il existe $\phi \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\rho\mu}(U)$ tel que

$$\iota^*_{U\cap V,U}\phi = \psi.$$

Démonstration. Les arguments de la preuve sont en fait empruntés à J. Cheeger (lemme 4.2 de [11]) : on considère $s : \Omega \to]-1,1[$ la projection sur le deuxième facteur $\Omega =]1,\infty[\times]-1,1[\times\Sigma$, on note $\Omega^\pm = \{\pm s > 0\}$ et σ l'involution de Ω qui échange $\Omega^\pm$ avec $\Omega^\mp$. Soit ξ une fonction lisse sur Ω qui ne dépend que de s tel que $\xi(\Omega) \subset [0,1]$ et $\xi = 0$ si $s \geq 1/2$, et $\xi = 1$ si $s \leq 1/3$. On étend cette fonction à $U \cup \Omega$ en lui imposant la valeur 0 sur le complémentaire de Ω. Lorsque $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U \cap V)$, on étend α à $(U\cap V)\cup\Omega$ en reflétant α le long de $\partial V\cap U = C_1(\{0\}\times\Sigma)$, i.e. sur $\Omega\setminus V$, $\alpha=\sigma^*\alpha$ et on pose $\bar\alpha=\xi\alpha$. On vérifie facilement que si ν est une fonction positive sur X qui est radiale sur Ω alors

$$\|\bar\alpha\|_{L^2_\nu(\Omega)} \leq 2\|\alpha\|_{L^2_\nu(\Omega^+)}.$$

Les arguments de J. Cheeger montre que si $\alpha\in\mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(U\cap V)$ alors

$$d\bar\alpha = \overline{d\alpha} + d\xi\wedge\bar\alpha$$

puisque le gradient de ξ est borné sur Ω par $1/r$, la proposition est bien démontrée. □

4. L^2 cohomologie des cônes.

4.1. **Inégalités de Hardy.** On rappelle ici quelques inégalités de type Hardy qui seront utiles un peu plus loin à propos de la L^2 cohomologie des cônes et des variétés QALE. Pour plus de détails sur ces inégalités nous renvoyons le lecteur au traité ([34]) et dans un cadre un peu plus général nous conseillons le survol de E.B. Davies ([12]).

Lemme 4.1. *Soit $\rho\,:\,[1,\infty[\to\mathbb{R}_+^*$ une fonction positive telle que*

$$\int^\infty \frac{dt}{\rho(t)} < \infty.$$

Si on définit

$$G(t) = \int_t^\infty \frac{d\tau}{\rho(\tau)},$$

alors pour tout $\varphi\in W^{1,2}_{loc}([1,\infty[)$ tel que $\varphi'\in L^2([1,\infty[,\rho dt)$ et $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0$ on a

$$\frac14\int_1^\infty\left(\frac{G'(t)}{G(t)}\right)^2|\varphi(t)|^2\rho(t)dt \leq \int_1^\infty|\varphi'(t)|^2\rho(t)dt.$$

Démonstration. La preuve est standard on pose $\varphi(t)=\sqrt{G(t)-G(T)}\,u(t)$ et on a alors

$$\int_1^T|\varphi'(t)|^2\rho(t)dt = \int_1^T\left[|u'|^2(G-G(T)) + u'uG' + \frac14 u^2\frac{G'^2}{G-G(T)}\right]\rho(t)dt$$

En intégrant par partie le terme du milieu, on obtient :

$$\int_1^T|\varphi'(t)|^2\rho(t)dt \geq \frac{u(1)^2-u(T)^2}{2} + \frac14\int_1^T u^2\frac{G'^2}{G-G(T)}\rho(t)dt$$

On obtient alors le résultat en faisant tendre T vers l'infini. □

Lorsque $\int^\infty \frac{dt}{\rho(t)}=\infty$ la même preuve fournit :

Lemme 4.2. *Soit $\rho\,:\,[1,\infty[\to\mathbb{R}_+^*$ une fonction positive telle que*

$$\int^\infty\frac{dt}{\rho(t)}=\infty.$$

Si on définit

$$g(t) = \int_1^t\frac{d\tau}{\rho(\tau)},$$

alors pour tout $\varphi \in W^{1,2}_{loc}([1,\infty[)$ *tel que* $\varphi' \in L^2([1,\infty[,\rho dt)$ *et* $\varphi(1)=0$ *on a*

$$\frac{1}{4}\int_1^\infty \left(\frac{g'(t)}{g(t)}\right)^2 |\varphi(t)|^2\rho(t)dt \le \int_1^\infty |\varphi'(t)|^2\rho(t)dt.$$

De ceci on en déduit les résultats de continuité pour les opérateurs

$$M_k(v) = \int_t^\infty v(s)\frac{s^{k-1}}{t^{k-1}}ds$$
$$\text{et}\quad m_k(v) = \int_1^t v(s)\frac{s^{k-1}}{t^{k-1}}ds$$

Proposition 4.3. (1) *si* $a>2k$ *et* $b\in\mathbb{R}$*, alors l'opérateur* M_k *est borné de* $L^2([1,\infty[,r^{a-1}(1+\log(r))^b dr)$ *dans* $L^2([1,\infty[,r^{a-3}(1+\log(r))^b dr)$*,*

(2) *si* $a<2k$ *et* $b\in\mathbb{R}$*, alors l'opérateur* m_k *est borné de* $L^2([1,\infty[,r^{a-1}(1+\log(r))^b dr)$ *dans* $L^2([1,\infty[,r^{a-3}(1+\log(r))^b dr)$*.*

(3) *Si* $a=2k$ *et* $b<1$ *alors l'opérateur* m_b *est borné de* $L^2([1,\infty[,r^{a-1}(1+\log r)^b dr)$ *dans* $L^2([1,\infty[,r^{a-3}(1+\log r)^{b-2} dr)$*.*

(4) *Si* $a=2k$ *et* $b>1$ *alors l'opérateur* M_k *est borné de* $L^2([1,\infty[,r^{a-1}(1+\log r)^b dr)$ *dans* $L^2([1,\infty[,r^{a-3}(1+\log r)^{b-2} dr)$*.*

On considère maintenant (V,h) une variété riemannienne de dimension $d-1$ et on note $C(V)$ le cône sur V, c'est la variété $]0,\infty[\times V$ équipée de la métrique

$$g = dr^2 + r^2\pi^*h$$

où r,π sont les projections sur le premier et second facteur. Pour $R>0$ on note $C_R(V)=\{r>R\}$ et $V_R=\{R\}\times V\subset C(V)$. Pour $R>0$, les variétés $C_R(V)$ sont quasi isométriques entre elles.

4.2. Annulation de la L^2 cohomologie des cônes.

Proposition 4.4. *Si* $k\le d/2$ *alors* $\mathbb{H}^k(C_1(V))=\{0\}$ *et si* $k\ge d/2$ *alors* $\mathbb{H}^k(C_1(V),V_1)=\{0\}$*.*

Ce résultat est bien connu mais la preuve nous fournira des renseignements supplémentaires sur $B^k(C_1(V))$.

Démonstration. On considère le champ de vecteur $X = r\frac{\partial}{\partial r}$ et Φ_t son flot :

$$\Phi_t(r,\theta) = (e^t r,\theta).$$

Si $\alpha\in Z_2^k(C_1(V))$, grâce à la formule de Cartan, nous avons pour $t>0$:

$$\alpha - \Phi_t^*\alpha = d\beta_t \text{ avec }\ \beta_t = -\int_0^t \Phi_\tau^*(\mathrm{int}_X\,\alpha)d\tau.$$

où int_X est l'opérateur produit intérieur par X. Avec l'estimation :

$$|\Phi_t^*\alpha|(r,\theta)\le e^{kt}|\alpha|(e^t r,\theta),$$

nous obtenons :

$$\int_{C_{e^t}(V)} |\Phi_t^*\alpha|^2 \le e^{(2k-d)t}\int_{C_{e^t}(V)}|\alpha|.$$

Ainsi pour $k\le d/2$ on a $\alpha = L^2\lim_{t\to\infty} d\beta_t$ et puisque $\beta_t\in L^2$ on a bien $\alpha\in B_2^k(C_1(V))$. Remarquons que puisque

$$|\Phi_\tau^*(\mathrm{int}_X\,\alpha)|(r,\theta)\le e^{k\tau}r|\alpha|(e^\tau r,\theta),$$

l'on a aussi
$$|\beta|(r,\theta) \leq \frac{1}{r^{k-1}} \int_r^{e^t r} |\alpha|(s,\theta) s^{k-1} ds.$$
Et donc on a pour $k < d/2$: $\alpha = dB^+\alpha$ avec
$$|B^+\alpha|(r,\theta)| \leq \frac{1}{r^{k-1}} \int_r^{\infty} |\alpha|(s,\theta) s^{k-1} ds.$$
Et avec (4.3), nous obtenons :
$$\|r^{-1} B^+\alpha\| \leq C\|\alpha\|. \tag{4.1}$$

Dans le second cas, si $\alpha \in Z_2^k(C_1(V), V_1)$ alors l'extension par zéro de α à $C(V)$ est encore fermée, on notera encore α cette extension et si $t < 0$ on a encore $\Phi_t^*\alpha \in Z_2^k(C_1(V), V_1)$. Grâce à la formule de Cartan, nous obtenons de même pour $t < 0$:
$$\alpha - \Phi_t^*\alpha = d\beta_t$$
On a maintenant
$$|\beta|(r,\theta) \leq \frac{1}{r^{k-1}} \int_{\inf\{e^t r, 1\}}^{r} |\alpha|(s,\theta) s^{k-1} ds.$$
α et $\Phi_t^*\alpha$ définissent donc la même classe dans $\mathbb{H}^k(C_1(V), V_1)$, mais pour $k \geq d/2$, $\Phi_t^*\alpha$ tend faiblement vers 0 dans L^2 lorsque $t \to -\infty$ (en même fortement si $k > d/2$). Donc cette classe de cohomologie relative est nulle. Cela prouve la deuxième annulation. On obtient ici $\alpha = dB^-\alpha$ avec
$$|B^-\alpha|(r,\theta)| \leq \frac{1}{r^{k-1}} \int_1^{r} |\alpha|(s,\theta) s^{k-1} ds.$$
d'où d'après (4.3) :
$$\|r^{-1} B^-\alpha\| \leq C\|\alpha\|, \text{ lorsque } k > d/2$$
$$\text{et } \|(r \log r)^{-1} B^-\alpha\| \leq C\|\alpha\|, \text{ lorsque } \ k = d/2.$$
□

4.3. L^2 cohomologie des cônes.

Proposition 4.5. *On suppose de plus que sur (V, h) l'image de d est fermée. Alors pour $k > d/2$, l'application de restriction $r = \iota_{C_1(V) \setminus C_2(V), C_1(V)}$ induit un isomorphisme :*
$$r^* : \mathbb{H}^k(C_1(V)) \to \mathbb{H}^k(C_1(V) \setminus C_2(V)) \simeq \mathbb{H}^k(V).$$
Et si de plus V est une variété à bord alors pour $k < d/2$ alors l'application d'extension par zéro est un isomorphisme :
$$\mathbb{H}^k(C_1(V) \setminus C_2(V), V_1 \cup V_2) \simeq \mathbb{H}^{k-1}(V) \to \mathbb{H}^k(C_1(V), V_1).$$

Démonstration. L'image de d est fermée sur $C_1(V) \setminus C_2(V)$ car $C_1(V) \setminus C_2(V)$ est quasi isométrique au produit $]1,2[\times V$ et de plus $\mathbb{H}^k(C_2(V), V_2) = \{0\}$ pour $k \geq d/2$, donc d'après (lemme 2.2 de [10]), on sait alors que r^* est injectif. De plus
$$\pi^* : L^2(\Lambda^k T^* V) \to L^2(\Lambda^k T^* C_1(V))$$
est justement continue pour $k > d/2$ et puisque $r^* \circ \pi^* = \mathrm{Id}$, r^* est aussi surjectif.

On va maintenant démontrer le second isomorphisme : nous commençons par démontrer que cette application est surjective : soit $\alpha \in Z_2^k(C_1(V), V_1)$ où $k < d/2$. Nous avons obtenu :

$$\alpha = dB^+\alpha$$

et si ρ est une fonction lisse sur $C_1(V)$ valant 1 sur un voisinage de $C_1(V) \setminus C_{3/2}(V)$ et nulle sur $C_{7/4}(V)$ alors

$$\alpha = d\left(\rho B^+\alpha\right) + d\left((1-\rho)B^+\alpha\right)$$

mais puisque grâce à l'estimée (4.1) et à (3.1), on sait que $d[(1-\rho)B^+\alpha]$ est nul dans $\mathbb{H}^k(C_1(V), V_1)$ et puisque $r^*d(\rho B^+\alpha) \in Z_2^k(C_1(V) \setminus C_2(V), V_1 \cup V_2)$, on a bien montré que cette application d'extension par zéro est surjective. On montre maintenant qu'elle est injective : soit donc $\alpha \in \mathcal{H}^{k-1}(V)$ alors la forme $\frac{dr}{r^{d-2k+1}} \wedge \pi^*\alpha$ est harmonique sur $C_1(V)$, c'est un élément non nul de $\mathcal{H}^k(C_1(V))$ qui représente donc un élément non nul de $\mathbb{H}^k(C_1(V))$.

□

4.4. **Presque fermeture de l'image de d.** On suppose maintenant que V est une variété compacte à bord éventuellement non vide.

Pour $k \neq d/2$, , nous notons $w_k = r^{-2}$ et $w_{d/2} = (r(1+\log r))^{-2}$ alors ces poids sont évidemment à décroissance parabolique sur $C_1(V)$ et nous avons montré que pour $k \geq d/2$ on a

$$d\mathcal{C}^{k-1}_{w_k,1}(C_1(V), V_1) = B_1^k(C_1(V), V_1)$$

et pour $k < d/2$ on a :

$$d\mathcal{C}^{k-1}_{w_k,1}(C_1(V)) = B_1^k(C_1(V))$$

En fait cette dernière identité est encore valable pour $k \geq d/2$. En effet soit $\alpha \in B_1^k(C_1(V))$, il existe donc $\psi \in L^2_{\text{loc}}$ tel que $\alpha = d\psi$, on a alors pour la fonction ρ précédente :

$$\alpha = d\rho\psi + d\left(B^-(\alpha - d\rho\psi)\right)$$

On a bien $B^-(\alpha - d\rho\psi), \rho\psi \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_k,1}(C_1(V))$.
Notons que l'argument donné ici a une portée plus générale :

Proposition 4.6. *Si $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X,Y) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ a son image fermée et si*
- *w est à décroissance parabolique,*
- *$Y \subset \partial\bar{X}$ a un voisinage V dans $\bar{X}$ quasi isométrique à $Y \times [0,1[$ avec $\partial Y \times [0,1[\subset \partial\bar{X}$ et que $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(V) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*V)$ a son image fermée*
- *$\mathbb{H}^k_\mu(X,Y) = \{0\}$,*

alors $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ a aussi son image fermée.

On peut aussi montrer le résultat suivant

Proposition 4.7. *Si $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ a son image fermée et si*
- *$Y \subset \partial\bar{X}$ est compact et a un voisinage dans $\bar{X}$ quasi isométrique à $Y \times [0,1[$ et $\partial Y \times [0,1[\subset \partial\bar{X}$.*
- *l'application naturelle $\mathbb{H}^{k-1}(Y) \to \mathbb{H}^k(X,Y)$ est injective,*
- *w est à décroissante parabolique.*

alors $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X,Y) \to L^2_\mu(\Lambda^k T^*X)$ a aussi son image fermée.

Démonstration. Soit donc $\alpha \in B^k_\mu(X,Y)$, on trouve alors $\psi \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X)$ tel que
$$\alpha = d\psi.$$
Soit ρ une fonction lipschitzienne à support compact dans $Y\times[0,1[$ et valant 1 près de $Y = Y\times\{0\}$. Nous avons aussi
$$\alpha = d(\rho\psi) + d[(1-\rho)\psi].$$
Puisque $(1-\rho)\psi \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X,Y)$, $d(\rho\psi)$ est donc dans le noyau de l'application naturelle
$$\mathbb{H}^{k-1}(Y) \simeq \mathbb{H}^k(Y\times[0,1], Y\times\{0,1\}) \to \mathbb{H}^k(X,Y),$$
il est donc nulle par hypothèse. Il existe donc $\phi \in \mathcal{D}^{k-1}(Y\times[0,1], Y\times\{0,1\})$ tel que $d(\rho\psi) = d\phi$. Si $\bar\phi$ est l'extension par zéro de ϕ à X, on a bien
$$\alpha = d\bar\phi + d[(1-\rho)\psi]$$
et $\bar\phi + (1-\rho)\psi \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(X,Y)$. □

Grâce à ces résultats et au corollaire (3.3), on obtient donc

Proposition 4.8. *Si $w = (r(1+\log r))^{-2}$, alors*
$$d\mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(C_1(V),V_1) = B^k_1(C_1(V),V_1) \text{ et } d\mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(C_1(V)) = B^k_1(C_1(V))$$

4.5. **L^2 cohomologie à poids.** Les arguments présentés auparavant se généralisent aisément à la cohomologie à poids : soit $a,b\in\mathbb{R}$, on introduit $L^2_{a,b}(\Lambda^kT^*C_1(V))$ l'espace des formes différentielles de carrés sommables pour la mesure $r^{2a}(1+\log r)^{2b}d\operatorname{vol}_g$ et on notera
$$\mathcal{C}^{k-1}_{a,b}(C_1(V)) = \{\alpha \in L^2_{a-1,b-1}(\Lambda^{k-1}T^*C_1(V)), d\alpha \in L^2_{a,b}(\Lambda^kT^*C_1(V))\}$$
et
$$\tilde{\mathcal{C}}^{k-1}_{a,b}(C_1(V)) = \{\alpha \in L^2_{a-1,b}(\Lambda^{k-1}T^*C_1(V)), d\alpha \in L^2_{a,b}(\Lambda^kT^*C_1(V))\}$$
et on notera de la même façon : $\mathcal{C}^{k-1}_{a,b}(C_1(V),V_1)$, $\tilde{\mathcal{C}}^{k-1}_{a,b}(C_1(V),V_1)$, $\mathbb{H}^k_{a,b}(C_1(V))$, $\mathbb{H}^k_{a,b}(C_1(V),V_1)$... La même preuve montre :

Théorème 4.9. *Lorsque V est une variété compacte à bord lisse et $(k,\frac12) \neq (\frac d2 + a, b)$ alors*
$$d : \mathcal{C}^{k-1}_{a,b}(C_1(V)) \to B^k_{a,b}(C_1(V)) \text{ et } d : \mathcal{C}^{k-1}_{a,b}(C_1(V),V_1) \to B^k_{a,b}(C_1(V),V_1)$$
ont des images fermées. Même mieux si $k \neq \frac d2 + a$ alors
$$d : \tilde{\mathcal{C}}^{k-1}_{a,b}(C_1(V)) \to B^k_{a,b}(C_1(V)) \text{ et } d : \tilde{\mathcal{C}}^{k-1}_{a,b}(C_1(V),V_1) \to B^k_{a,b}(C_1(V),V_1)$$
ont des images fermées. De plus
- *Si $(k,-\frac12) < (\frac d2 + a, b)$[4], alors $\mathbb{H}^k_{a,b}(C_1(V)) = \{0\}$.*
- *Si $(k,-\frac12) > (\frac d2 + a, b)$, alors $\mathbb{H}^k_{a,b}(C_1(V)) = \mathbb{H}^k(V)$.*
- *Si $(k,\frac12) > (\frac d2 + a, b)$, alors $\mathbb{H}^k_{a,b}(C_1(V),V_1) = \{0\}$.*
- *Si $(k,\frac12) < (\frac d2 + a, b)$, alors $\mathbb{H}^k_{a,b}(C_1(V),V_1) = \mathbb{H}^{k-1}(V)$.*

Démonstration. Les mêmes arguments que précédemment montrent que pour $(k,\frac12) < (\frac d2 + a, b)$, alors $d\mathcal{C}^{k-1}_{a,b}(C_1(V)) = Z^k_{a,b}(C_1(V))$ et pour $(k,\frac12) > (\frac d2 + a, b)$, alors $d\mathcal{C}^{k-1}_{a,b}(C_1(V),V_1) = Z^k_{a,b}(C_1(V),V_1)$. On obtient de la même façon les isomorphismes :

[4] l'ordre est ici l'ordre lexicographique

– si $(k,-\frac{1}{2}) > (\frac{d}{2}+a,b)$, alors $\mathbb{H}^k_{a,b}(C_1(V)) = \mathbb{H}^k(V)$,
– si $(k,\frac{1}{2}) < (\frac{d}{2}+a,b)$, alors $\mathbb{H}^k_{a,b}(C_1(V),V_1) = \mathbb{H}^{k-1}(V)$.

Et grâce à (4.6,4.7), on conclut de même que pour $(k,\frac{1}{2}) \neq (\frac{d}{2}+a,b)$ alors l'image de d est presque fermée en tout degré par rapport à w (ou même à $\bar{w} = r^{-2}$ si $k \neq \frac{d}{2}+a$). Il reste donc à montrer que si $k = \frac{d}{2}+a$ et $b \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, alors $\mathbb{H}^k_{a,b}(C_1(V)) = \{0\}$. L'application de restriction $r^* : \mathbb{H}^k_{a,b}(C_1(V)) \to \mathbb{H}^k(C_1(V) \setminus C_2(V)) \simeq \mathbb{H}^k(V)$ est comme précédemment injective. Il suffit donc de montrer que pour ces valeurs de k,a,b, cette application est nulle. Pour cela, on montre que si $\alpha \in Z^k_{a,b}(C_1(V))$ et $\beta \in \mathcal{H}^{d-1-k}(V_1,\partial V_1)$ alors

$$c = \int_{V_1} \iota_1^*\alpha \wedge \beta = 0,$$

où on note $\iota_r : \{1\} \times V \to \{r\} \times V$. Pour cela on procède comme dans la preuve de la proposition (3.7) de [10] : on a bien sur

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(\int_{V_1} \iota_t^*\alpha \wedge \beta\right)^2 \\ &\leq \|\beta\|^2_{L^\infty} t^{2k} \int_V |\alpha|^2(t,\theta) d\,\mathrm{vol}_h; \end{aligned}$$

D'où :

$$c^2 \int_1^\infty t^{2a-2k} t^{d-1} (1+\log t)^{2b} dt \leq \|\beta\|^2_{L^\infty} \|\alpha\|^2_{L^2_{a,b}}.$$

Si $k = \frac{d}{2}+a$ et $b \geq -\frac{1}{2}$, on obtient bien la nullité de c.

□

Nous devons néanmoins améliorer quelque peu ce résultat lorsque $k = \frac{d}{2}+a$:

Proposition 4.10. *Soit V une variété compacte à bord lisse et $k = \frac{d}{2}+a$, $b \neq \frac{1}{2}$ alors :*

i) Si le $(k-1)$-groupe de cohomologie de V est nulle $b_{k-1}(V) = 0$, alors

$$d : \tilde{\mathcal{C}}^{k-1}_{a,b}(C_1(V)) \to B^k_{a,b}(C_1(V)) \text{ et } d : \tilde{\mathcal{C}}^{k-1}_{a,b}(C_1(V),V_1) \to B^k_{a,b}(C_1(V),V_1)$$

ont des images fermées.

ii) Si $b_{k-1}(V) \neq 0$, notons $\mathcal{H}^k(V,h)$ l'espace des formes harmoniques L^2 sur V qui vérifient la condition absolue :

$$\mathcal{H}^k(V,h) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*V), d\alpha = 0, d^*\alpha = 0, \mathrm{int}_{\vec{\nu}}\,\alpha = 0\}$$

où on a noté $\vec{\nu} : \partial V \to TV$ le champ normal unitaire entrant de V. Alors si $\alpha \in B^k_{a,b}(C_1(V))$, alors il existe $u \in \tilde{\mathcal{C}}^{k-1}_{a,b}(C_1(V))$ et $v \in \mathcal{C}^{k-1}_{a,b}(C_1(V))$ telle que

$$\mathrm{int}_{\frac{\partial}{\partial r}}\, v = 0 \text{ et } \forall r > 1, \iota_r^* v \in \mathcal{H}^k(V,h)$$

tels que

$$\alpha = du + dv.$$

De même si $\alpha \in B^k_{a,b}(C_1(V),V_1)$ alors il existe $u \in \tilde{\mathcal{C}}^{k-1}_{a,b}(C_1(V),V_1)$ et $v \in \mathcal{C}^{k-1}_{a,b}(C_1(V),V_1)$ tel que

$$\mathrm{int}_{\frac{\partial}{\partial r}}\, v = 0 \text{ et } \forall r > 1, \iota_r^* v \in \mathcal{H}^k(V,h)$$

avec

$$\alpha = du + dv.$$

Démonstration. On ne montre que la deuxième assertion (la première en étant un cas particulier) pour le cas absolu et $b > 1/2$ (le cas relatif à V_1 et $b < 1/2$ est identique à une modification évidente près). Dans les autres cas s'en déduisent grâce aux propositions (4.6,4.7).

Pour la commodité des notations, on se sert du difféomorphisme : $\Phi : \mathbb{R}_+ \times V \to C_1(V)$ défini par

$$\phi(t,\theta) = (e^t, \theta)$$

qui est conforme lorsque $\mathbb{R}_+ \times V$ est équipé de la métrique riemannienne produit $(dt)^2 + h$. Alors Φ^* est isométrie entre $L^2_{a,b}(\Lambda^k T^* C_1(V))$ et $L^2_{\rho_{k,a,b}}(\Lambda^k T^*(\mathbb{R}_+ \times V))$ où $\rho_{k,a,b}(t,\theta) = e^{(2a-2k+d)t}(1+t)^{2b}$. Pour le degré $k = \frac{d}{2} + a$, nous avons donc $\rho_{k,a,b} := \rho_b = (1+t)^{2b}$. On travaille donc sur $\mathbb{R}_+ \times V$. Et on identifie :

$$L^2_{\mathrm{loc}}(\Lambda^k T^*(\mathbb{R}_+ \times V)) \simeq dt \wedge L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, \Lambda^{k-1}T^*(V)) \oplus L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, \Lambda^k T^*(V)).$$

Soit donc $\alpha \in B^k_{\rho_b}(\mathbb{R}_+ \times V)$, on peut donc écrire :

$$\alpha = dt \wedge \alpha_0 + \alpha_1$$

avec

$$\alpha_0 \in L^2(\mathbb{R}_+, \Lambda^{k-1}T^*(V)) \text{ et } \alpha_1 \in L^2(\mathbb{R}_+, \Lambda^k T^*(V))$$

on sait (cf. 2.1) qu'il existe $\beta = dt \wedge \beta_0 + \beta_1 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Lambda^k T^*(\mathbb{R}_+ \times V))$ tel que

$$\alpha = d\beta.$$

Si on note d_0 l'opérateur de différentiation extérieur sur V alors

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = d_0 \beta_1(t) \\ \alpha_0(t) = \beta_1'(t) - d_0 \beta_0(t) \end{cases}$$

On veut modifier β pour qu'il satisfasse nos conditions. Nous utilisons maintenant la décomposition de Hodge de $L^2(\Lambda^\bullet T^* V)$; notons

$$\mathcal{D}^k = \{u \in W^{1,2}(\Lambda^k T^* V), \mathrm{int}_{\vec{\nu}}\, u = 0 \text{ le long de } \partial V\}$$

où nous avons noté $W^{1,2}(\Lambda^\bullet(T^*V))$ l'espace de Sobolev des sections de $\Lambda^\bullet(T^*V)$ qui sont dans L^2 ainsi que leurs premières dérivées. Nous savons que si $\alpha \in L^2((\Lambda^k T^* V)$ alors il existe un unique triplet $(h,f,g) \in \mathcal{H}^k(V) \oplus \mathcal{D}^{k-1} \oplus \mathcal{D}^{k+1}$ telle que

$$\alpha = h + d_0 f + d_0^* g \text{ et } f, g \perp \mathcal{H}^\bullet(V),\ d_0^* f = d_0 g = 0,$$

de plus il existe une constante C telle que

$$\|d_0 f\| + \|f\| + \|d_0^* g\| + \|g\| \le C\|\alpha\|$$

où on a noté ici $\|\,.\,\|$ la norme L^2 sur V. Nous décomposons alors pour $i = 0,1$

$$\alpha_i(t) = d_0 u_i(t) + d_0^* v_i(t) + w_i(t) \text{ et } \beta_i(t) = d_0 f_i(t) + d_0^* g_i(t) + h_i(t)$$

Et nous obtenons les équations :

$$v_1 = w_1 = 0$$

et

$$\alpha_1 = d_0 u_1 = d_0 d_0^* g_1, \tag{4.2}$$

$$h_1' = w_0, \tag{4.3}$$

$$d_0^* g_1' = d_0^* v_0 \tag{4.4}$$

$$d_0 f_1' - d_0 d_0^* g_0 = d_0 u_0 \tag{4.5}$$

Afin de résoudre (4.5), nous supposons que

$$df_1 = g_0'$$

et alors (4.5) devient :

$$g_0'' - d_0 d_0^* g_0 = g_0'' - (d_0 d_0^* + d_0^* d_0) g_0 = d_0 u_0. \tag{4.6}$$

Mais pour $\mu > 0$ l'opérateur

$$L_\mu f = f'' - \mu f$$

sur $L^2(\mathbb{R}_+, (1+t)^{2b} dt)$ avec les conditions de Dirichlet en $t = 0$ est inversible et qu'il existe une constante C indépendante de μ tel que si $L_\mu f = g$ avec $f(0) = 0$ alors

$$(1 + |\mu|)\|f\|_b + \|f'\|_b \le C\|g\|_b$$

$\| \|_b$ étant la norme de $L^2(\mathbb{R}_+, (1+t)^{2b} dt)$.

Ainsi en utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur $(d_0 d_0^* + d_0^* d_0)$ sur $L^2(\Lambda^\bullet(TV))$ (pour les conditiosn absolu sur le bord de V) on trouve une solution unique g_0 de (4.6) telle que

$$\begin{aligned} &g_0(0) = 0 \\ &\|g_0'\|_{\rho_b} + \|d_0^* g_0\|_{\rho_b} + \|g_0\|_{\rho_b} \le C\|du_0\|_{\rho_b} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Nous posons alors

$$v(t) = -\int_t^\infty w_0(s) ds$$

et

$$u = dt \wedge d_0^* g_0 + g_0' + u_1,$$

nous obtenons alors

$$\alpha = du + dv$$

de plus u et v vérifient bien les propriétés requises : $u \in L^2_{\rho_b}$ et $v \in L^2_{\rho_{b-1}}$ □

4.6. **Cohomologie L^2 des variétés à bouts coniques :** Nous pouvons grâce à ces calculs déterminer la cohomologie L^2 à poids des variétés dont un voisinage de l'infini est un bout de cône.

Théorème 4.11. *Soit (X^d, g) une variété riemannienne dont un voisinage de l'infini est isométrique à un bout de cône $C_1(V)$ sur une variété riemannienne compacte V^{d-1} et soit μ, w des fonction lisses sur X telles que sur $C_1(V)$*

$$\mu(r,\theta) = r^{2a} \quad \text{et} \quad w(r,\theta) = r^{-2}(1 + \log r)^{-2}.$$

Alors l'image de $d : \mathcal{D}^k_\mu(d) \to L^2_\mu$ est presque fermée en tout degré par rapport à w et on a

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) = \begin{cases} H^k_c(X) & \text{si } k < d/2 + a \\ \operatorname{Im}\left(H^k_c(X) \to H^k(X)\right) & \text{si } k = d/2 + a \\ H^k(X) & \text{si } k > d/2 + a \end{cases}.$$

Ce résultat est en fait bien connu, une preuve différente est faite dans l'article de T. Hausel, E. Hunsicker et R. Mazzeo ([15]) ; on peut aussi en donner une preuve avec les arguments de N. Yeganefar [39] et de [9]. Nous montrons ici comment utiliser nos résultats précédents pour prouver ce théorème :

Démonstration. Nos résultats précédents impliquent que les images des applications

$$d : \mathcal{C}^{k-2}_{w,w\mu}(C_1(V)) \to L^2_{w\mu}\left(\Lambda^{k-1}T^*(C_1(V))\right)$$

et de

$$d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,\mu}(C_1(V)) \to L^2_{\mu}\left(\Lambda^{k}T^*(C_1(V))\right)$$

sont fermées ; de plus $\mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(C_1(V))$ est bien de dimension finie. Grâce à (3.15), nous pouvons affirmer que l'image de d est presque fermée sur X en tout degré par rapport à w. Si $K \subset X$ est le compact dont le complémentaire est $C_1(V)$ alors on a la suite exacte de Mayer Vietoris :

(4.8)

$$\mathbb{H}^{k-1}(K) \oplus \mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(C_1(V)) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^{k-1}(\partial K)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{b}} \mathbb{H}^k_\mu(X) \xrightarrow{\mathrm{r}^*} \mathbb{H}^k(K) \oplus \mathbb{H}^k_\mu(C_1(V)) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^k_\mu(\partial K).$$

Lorsque $k < d/2 + a$, on sait que

$$\mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(C_1(V)) = \mathbb{H}^k_\mu(C_1(V)) = \{0\},$$

cette suite exacte se réduit donc à :

$$\mathbb{H}^{k-1}(K) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^{k-1}(\partial K) \xrightarrow{\mathrm{b}} \mathbb{H}^k_\mu(X) \xrightarrow{\mathrm{r}^*} \mathbb{H}^k(K) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^k(\partial K).$$

Puisqu'on a aussi la suite exacte :

$$\mathbb{H}^{k-1}(K) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^{k-1}(\partial K) \xrightarrow{\mathrm{b}} \mathbb{H}^k(K,\partial K) \xrightarrow{\mathrm{r}^*} \mathbb{H}^k(K) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^k(\partial K),$$

Le lemme des cinq flèches impliquent que l'application naturelle

$$\mathbb{H}^k(K,\partial K) \simeq H^k_c(X) \to \mathbb{H}^k_\mu(X)$$

est un isomorphisme.

Lorsque $k > d/2 + a$, on sait que

$$\mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(C_1(V)) = H^{k-1}(\partial K) \ \text{ et } \ \mathbb{H}^k_\mu(C_1(V)) = H^{k-1}(\partial K),$$

donc les premières et dernières flèches de la suite (4.8) sont surjectives. On en déduit que l'application de restriction

$$\mathbb{H}^k(X) \to H^k(K) \simeq H^k(X)$$

est un isomorphisme.

Lorsque $k = d/2 + a$, on a montré que

$$\mathbb{H}^{k-1}_{w\mu}(C_1(V)) = H^{k-1}(\partial K) \ \text{ et } \ \mathbb{H}^k_\mu(C_1(V)) = \{0\},$$

Dans la suite exacte (4.8) la troisième flèche est donc injective et donc

$$\mathbb{H}^k(X) \simeq \ker\left(H^k(K) \to H^k(\partial K)\right) = \operatorname{Im}\left(H^k(K,\partial K) \to H^k(K)\right).$$

□

Remarque 4.12. Nous avons en fait un peu mieux si $k \neq d/2 + a$ ou si $k = d/2 + a$ et $b_{k-1}(V) = 0$ alors l'image de $d : \mathcal{D}^k_\mu(d) \to L^2_\mu$ est presque fermée en degré k par rapport à

$$\bar{w}(r,\theta) = r^{-2}.$$

Nous utiliserons plus loin uniquement le cas où V est le quotient de la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ par un sous groupe fini $G \subset \mathrm{SO}(d)$ (G agit donc sans point fixe sur $\mathbb{S}^{d-1}$) on dit alors que X est une variété ALE (Asymptotiquement Localement Euclidienne) à un seul bout :

Corollaire 4.13. *Soit (X^d, g) une variété ALE à un seul bout alors on a pour la cohomologie L^2 de X :*

$$\mathbb{H}^k(X) = \mathrm{Im}\left(H_c^k(X) \to H^k(X)\right) = \begin{cases} H_c^k(X) & \text{si } k < d \\ H^k(X) & \text{si } k > 0 \end{cases}.$$

En particulier, l'application $\mathbb{H}^k(X) \to H^k(X)$ est toujours injective, et l'application $H_c^k(X) \to \mathbb{H}^k(X)$ est toujours surjective. De plus si $d > 2$, alors l'image de d : $\mathcal{D}^k(d) \to L^2$ est presque fermée en tout degré par rapport à $\bar{w}$.

4.7. **Une formule de Künneth.** On considère deux variétés riemanniennes (X_1, g_1) et (X_2, g_2) et la variété $X = X_1 \times X_2$ équipée de la métrique produit. Un corollaire direct des arguments de S. Zucker ([40]) est le suivant :

Proposition 4.14. *Supposons que l'image de $d : \mathcal{D}_{\mu_1}(X_1) \to L^2_{\mu_1}(\Lambda^\bullet T^* X_1)$ soit fermée et que l'image de $d : \mathcal{C}_{w_2,\mu_2}(X_2) \to L^2_{\mu_2}(\Lambda^\bullet T^* X_2)$ soit fermée alors si $\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)\mu_2(x_2)$ et $w(x_1, x_2) = w_2(x_2)$ l'image de*

$$d : \mathcal{C}_{w,\mu}(X) \to L^2_\mu(\Lambda^\bullet T^* X)$$

est fermée de plus

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathbb{H}^p_{\mu_1}(X_1) \otimes \mathbb{H}^p_{\mu_2}(X_2).$$

Il n'est néanmoins pas clair que si l'image de d est presque fermée sur chacun des facteurs alors elle est presque fermée sur le produit. Il est possible qu'en utilisant les techniques introduites par R. Mazzeo et A. Vasy ([30]), on puisse dans certains cas démontrer de tels résultats. En fait, nous aurons uniquement besoin d'une version très affaiblie :

Proposition 4.15. *On suppose que l'image de $d : \mathcal{C}^\bullet_{w_1,\mu_1}(X_1) \to L^2_{\mu_1}(\Lambda^\bullet T^* X_1)$ est fermée. On considère $X = X_1 \times C_1(\mathbb{S}^{d-1})$ équipé de la métrique riemannienne produit et de la mesure $\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)$, on pose $\bar{w}_2(x_1, x_2) = |x_2|^{-2}$ et $w_2(x_1, x_2) = |x_2|^{-2}(1 + \log|x_2|)^{-2}$ et on définit*

$$Y = X_2 \times \partial C_1(\mathbb{S}^{d-1}) = X_2 \times \mathbb{S}^{d-1} \subset \partial X$$

alors

i) si $d > 2$: alors pour $\alpha \in B^k_\mu(X)$, il y a $\beta_2 \in \mathcal{C}^{k-1}_{\bar{w}_2,\mu}(X)$ et $\beta_1 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_1,\mu}(X)$ tels que

$$\alpha = d\beta_1 + d\beta_2,$$

de plus

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathbb{H}^p_{\mu_1}(X_1) \otimes \mathbb{H}^p(C_1(\mathbb{S}^{d-1})) = \mathbb{H}^{k-d+1}_{\mu_1}(X_1)$$

de même pour $\alpha \in B^k_\mu(X, Y)$, il y a $\beta_2 \in \mathcal{C}^{k-1}_{\bar{w}_2,\mu}(X, Y)$ et $\beta_1 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_1,\mu}(X, Y)$ tels que

$$\alpha = d\beta_1 + d\beta_2,$$

de plus

$$\mathbb{H}^k_\mu(X,Y) = \bigoplus_{p+q=k} \mathbb{H}^p_{\mu_1}(X_1) \otimes \mathbb{H}^p(C_1(\mathbb{S}^{d-1}), \mathbb{S}^{d-1}) = \mathbb{H}^{k-1}_{\mu_1}(X_1)$$

ii) Si $d = 2$: alors pour $\alpha \in B^k_\mu(X)$, il y a $\beta_2 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_2,\mu}(X)$ et $\beta_1 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_1,\mu}(X)$ tels que

$$\alpha = d\beta_1 + d\beta_2,$$

de même pour $\alpha \in B^k_\mu(X,Y)$, il y a $\beta_2 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_2,\mu}(X,Y)$ et $\beta_1 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_1,\mu}(X,Y)$ tels que

$$\alpha = d\beta_1 + d\beta_2,$$

de plus

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) = \{0\} \text{ et } \mathbb{H}^k_\mu(X,Y) = \{0\}$$

On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.16. *i) Soit $d > 2$, il existe un opérateur continu*

$$B : L^2(C_1(\mathbb{S}^{d-1})) \to L^2_{\bar{w}_2}(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))$$

tel que pour si $\alpha \in L^2(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))$, alors $B\alpha \in W^{1,2}_{loc}$ et $\mathrm{int}_{\frac{\partial}{\partial r}} B\alpha = 0$ sur $\mathbb{S}^{d-1} = \partial C_1(\mathbb{S}^{d-1})$. De plus si $\alpha \in \mathcal{D}(d)$ alors

$$\alpha = h(\alpha) + dB\alpha + Bd\alpha,$$

où h est un projecteur continu sur $\mathcal{H}^\bullet(C_1(\mathbb{S}^{d-1})) = \mathbb{R} * \frac{dr}{r^{d-1}}$. De la même façon, il existe un opérateur continu

$$B_{rel} : L^2(C_1(\mathbb{S}^{d-1})) \to L^2_{\bar{w}_2}(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))$$

tel que si $\alpha \in L^2(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))$, alors $B\alpha \in W^{1,2}_{loc}$ et $\iota^*_{\partial C_1(\mathbb{S}^{d-1})} B\alpha = 0$. si $\alpha \in \mathcal{D}(d, \mathbb{S}^{d-1})$ alors

$$\alpha = h(\alpha) + dB\alpha + Bd\alpha$$

où h est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}^\bullet(C_1(\mathbb{S}^{d-1}), \mathbb{S}^{d-1}) = \mathbb{R}\frac{dr}{r^{d-1}}$.

ii) Si $d = 2$, alors il existe un opérateur continu $B_{rel} : L^2 \to L^2_{w_2}$ vérifiant les mêmes propriétés que si dessus et tel que si $\alpha \in \mathcal{D}(d, \mathbb{S}^{d-1})$ alors

$$\alpha = dB\alpha + Bd\alpha$$

Démonstration. On montre d'abord le premier cas et on expliquera les aménagements nécessaires pour démonter les deux autres cas.

Grâce à l'opérateur

$$\Delta_{abs} = d_{abs}(d_{abs})^* + (d_{abs})^* d_{abs}$$

on d_{abs} est la restriction de d à $\mathcal{D}(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))$, on bâtit un opérateur continu

$$B_1 = (d_{abs})^* \int_0^1 e^{-s\Delta_{abs}} ds : L^2(\Lambda^k T^*(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))) \to \mathcal{D}^{k-1}(d) \cap \mathcal{D}^{k-1}(d^*_{abs})$$

De plus, nous avons pour $\alpha \in \mathcal{D}(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))$

$$\alpha = S\alpha + dB\alpha + Bd\alpha$$

où $S = e^{-\Delta_{abs}}$ commute avec d_{abs}, de plus $S\alpha$ est un forme C^∞ sur $C_1(\mathbb{S}^{d-1})$.

On peut alors comme dans [7] effectuer la moyenne de $S\alpha$ suivant $\mathrm{SO}(d)$, on obtient

$$S\alpha = M\alpha + dB_2\alpha + B_2 d\alpha$$

où

$$B_2 : L^2(C_1(\mathbb{S}^{d-1})) \to L^2_{\bar{w}_2}(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))$$

est continue. Et $M\alpha$ est une forme $\mathrm{SO}(d)-$invariante elle est donc de la forme :

$$M\alpha = u_0 + u_1 dr + u_{d-1} * dr + u_d * 1$$

où u_0, u_1, u_{d-1}, u_d sont des fonctions C^∞ de carré sommables sur $[1, \infty[$, de plus $u_1(1) = u_d(1) = 0$. On pose alors

$$B_3\alpha = -\left(\int_r^\infty u_1(s)ds\right) + \left(\int_1^r u_d(s)\frac{ds}{s^{d-1}}\right)\frac{*dr}{r^{d-1}}$$

Grâce à nos estimées (4.3), l'opérateur $B_3 : L^2 \to L^2_{\bar{w}_2}$ est continue de plus il est clair que

$$M\alpha = u_{d-1}(1)\frac{*dr}{r^{d-1}} + dB_3\alpha + B_3 d\alpha$$

L'opérateur $B = B_1 + B_2 + B_3$ convient alors.

Dans le cas relatif, la même preuve convient à condition de considérer l'opérateur Δ_{rel} et de modifier le dernier opérateur B_3 par l'opérateur

$$B_{3,rel}\alpha = \frac{1}{r^{d-2}}\left(\int_1^\infty u_1(s)ds\right) - \left(\int_r^\infty u_1(s)ds\right) + \left(\int_1^r u_d(s)\frac{ds}{s^{d-1}}\right)\frac{*dr}{r^{d-1}}$$

Lorsque $d = 2$, il faut considérer l'opérateur

$$\tilde{B}_{3,rel}\alpha = \left(\int_1^r u_1(s)ds\right) + \left(\int_1^r u_d(s)\frac{ds}{s^{d-1}}\right)\frac{*dr}{r^{d-1}}.$$

□

On peut maintenant prouver la proposition :

Démonstration. On le fait d'abord dans le cas où $d > 2$. Suivant S. Zucker (preuve du théorème 2.29 de [40]), on déduit du lemme précédent un opérateur borné

$$\bar{B} : L^2_\mu(\Lambda^k T^*X) \to L^2_{\bar{w}_2\mu}(\Lambda^{k-1}T^*X),$$

tel que si $\alpha \in Z^k_\mu(X)$ alors

$$\alpha = \bar{h}(\alpha) + d\bar{B}\alpha,$$

Où $\bar{h}(\alpha)$ est une projection de α sur les formes qui sont dans $L^2_{\mu_1}(\Lambda^\bullet T^*X_1) \otimes \mathcal{H}^\bullet(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))$. A proprement parlé, nous n'obtenons pour $\alpha \in Z^k_\mu(X)$ directement que l'égalité

$$\rho\alpha = \bar{h}(\rho\alpha) + d\bar{B}(\rho\alpha) + \bar{B}(d\rho \wedge \alpha)$$

pour toutes les fonctions ρ qui ne dépendent que de la seconde variable et dont le support est inclus un voisinage borné de $X_1 \times (\partial(C_1(\mathbb{S}^{d-1})))$, on conclut alors en choisissant une suite judicieuse de telles fonctions (c'est le fait que $\bar{w}_2$ soit à décroissante parabolique qui nous permet de trouver une telle suite).

On sait que $\mathcal{H}^\bullet(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))$ est de dimension un, l'hypothèse que l'image de d est presque fermée sur X_1 implique que l'image de

$$d : \mathcal{C}^\bullet_{w_1,\mu_1}(X_1) \otimes \mathcal{H}^\bullet(C_1(\mathbb{S}^{d-1})) \to L^2_{\mu_1}(\Lambda^\bullet T^*X_1) \otimes \mathcal{H}^\bullet(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))$$

est aussi fermée. En particulier si H est le projecteur orthogonal de $L^2_\mu(\Lambda T^*X)$ sur $\mathcal{H}_\mu(X) = \mathcal{H}_{\mu_1}(X_1) \otimes \mathcal{H}^\bullet(C_1(\mathbb{S}^{d-1}))$ alors on trouve

$$\beta_1 \in \mathcal{H}_{\mu_1}(X_1) \otimes \mathcal{C}_{w_2,\mu_2}(X_2) \subset \mathcal{C}_{w_2,\mu}(X)$$

tel que $\bar{h}(\alpha) = H(\alpha) + d\beta_1$, si alors on pose $\beta_2 = \bar{B}\alpha$, on obtient bien le résultat annoncé.

La preuve pour le cas où $d \geq 2$ et concernant la cohomologie L^2_μ relative de X est identique. Il reste à démontrer le résultat pour le cas $d = 2$ et pour la cohomologie L^2_μ absolue, et cela est une conséquence des propositions (4.6) et (4.14).

□

On peut évidement adapter cette preuve lorsqu'on considère d'autre poids sur $X = X_1 \times X_2$, et une preuve identique montre que

Proposition 4.17. *On suppose que l'image de* $d : \mathcal{C}_{w_1,\mu_1}(X_1) \to L^2_{\mu_1}(\Lambda^\bullet T^*X_1)$ *est fermée. On considère* $X = X_1 \times C_1(\mathbb{S}^{d-1})$ *équipé de la métrique riemannienne produit et de la mesure* $\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)$*, et on pose* $\bar{w}_2(x_1, x_2) = |x_2|^{-2}$ *et* $w_2(x_1, x_2) = |x_2|^{-2}(1+\log|x_2|)^{-2}$ *et on définit* $Y = X_2 \times \partial C_1(\mathbb{S}^{d-1}) = X_2 \times \mathbb{S}^{d-1} \subset \partial X$*. Soit* $Z = \emptyset$ *ou* $Z = Y$*.*

i) Lorsque pour $d > 2$*, on considère sur* $X_1 \times X_2$*, le poids*

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)(1 + \log|x_2|)^{-2},$$

alors pour $\alpha \in B^k_\mu(X, Z)$*, il y a* $\beta_2 \in \mathcal{C}^{k-1}_{\bar{w}_2,\mu}(X, Z)$ *et* $\beta_1 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_1,\mu}(X, Z)$ *tels que*

$$\alpha = d\beta_1 + d\beta_2,$$

de plus

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) = \mathbb{H}^{k-d+1}_{\mu_1}(X_1) \text{ et } \mathbb{H}^k_\mu(X, Y) = \mathbb{H}^{k-1}_{\mu_1}(X_1).$$

ii) Lorsque pour $d > 4$*, on considère sur* $X_1 \times X_2$*, le poids*

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)|x_2|^{-2}(1 + \log|x_2|)^{-2}$$

ou

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)|x_2|^{-2}(1 + \log|x_2|)^{-4}$$

alors pour $\alpha \in B^k_\mu(X, Z)$*, il y a* $\beta_2 \in \mathcal{C}^{k-1}_{\bar{w}_2,\mu}(X, Z)$ *et* $\beta_1 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_1,\mu}(X, Z)$ *tels que*

$$\alpha = d\beta_1 + d\beta_2,$$

de plus

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) = \mathbb{H}^{k-d+1}_{\mu_1}(X_1) \text{ et } \mathbb{H}^k_\mu(X, Y) = \mathbb{H}^{k-1}_{\mu_1}(X_1).$$

iii) Lorsque pour $d \leq 4$*, on considère sur* $X_1 \times X_2$*, le poids*

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)|x_2|^{-2}(1 + \log|x_2|)^{-2}$$

ou

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)|x_2|^{-2}(1 + \log|x_2|)^{-4}$$

alors

$$\mathbb{H}^k_\mu(X, Y) = \{0\}$$

et pour $d > 2$ *alors*

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) = \mathbb{H}^{k-d+1}_{\mu_1}(X_1)$$

par contre pour $d = 2$ alors :

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) = \mathbb{H}^k_{\mu_1}(X_1) \oplus \mathbb{H}^{k-1}_{\mu_1}(X_1)$$

Si de plus $d \neq 4$ alors pour $\alpha \in B^k_\mu(X, Z)$, il y a $\beta_2 \in \mathcal{C}^{k-1}_{\tilde{w}_2,\mu}(X, Z)$ et $\beta_1 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_1,\mu}(X, Z)$ tels que

$$\alpha = d\beta_1 + d\beta_2.$$

Mais lorsque $d = 4$, alors pour $\alpha \in B^k_\mu(X, Z)$, il y a $\beta_2 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_2,\mu}(X, Z)$ et $\beta_1 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_1,\mu}(X, Z)$ telle que $\alpha = d\beta_1 + d\beta_2$.

iv) Lorsque pour $d > 2$, on considère sur $X_1 \times X_2$, le poids

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)|x_2|^2(1 + \log|x_2|)^2$$

ou

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)|x_2|^2$$

alors pour $\alpha \in B^k_\mu(X, Y)$, il y a $\beta_2 \in \mathcal{C}^{k-1}_{\tilde{w}_2,\mu}(X, Y)$ et $\beta_1 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_1,\mu}(X, Y)$ tels que

$$\alpha = d\beta_1 + d\beta_2.$$

De plus

$$\mathbb{H}^k_\mu(X, Y) = \mathbb{H}^{k-1}_{\mu_1}(X_1).$$

v) Lorsque pour $d = 2$, on considère sur $X_1 \times X_2$, le poids

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)|x_2|^2$$

alors pour $\alpha \in B^k_\mu(X, Y)$, il y a $\beta_2 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_2,\mu}(X, Y)$ et $\beta_1 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_1,\mu}(X, Y)$ tels que

$$\alpha = d\beta_1 + d\beta_2.$$

De plus

$$\mathbb{H}^k_\mu(X, Y) = \mathbb{H}^{k-1}_{\mu_1}(X_1).$$

vi) Lorsque pour $d = 2$, on considère sur $X_1 \times X_2$, le poids

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)|x_2|^2(1 + \log|x_2|)^2$$

alors pour $\alpha \in B^k_\mu(X, Y)$, il y a $\beta_2 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_2,\mu}(X, Y)$ et $\beta_1 \in \mathcal{C}^{k-1}_{w_1,\mu}(X, Y)$ tels que

$$\alpha = d\beta_1 + d\beta_2.$$

De plus

$$\mathbb{H}^k_\mu(X, Y) = \mathbb{H}^{k-1}_{\mu_1}(X_1) \oplus \mathbb{H}^{k-2}_{\mu_1}(X_1).$$

5. La géométrie des variétés QALE.

Dans le livre [22], D. Joyce construit non seulement de nouvelles variétés compactes à holonomie exceptionnelle, mais aussi il construit de nouveaux exemples de variétés complètes non compactes Kähler-Einstein à courbure scalaire nulle sur certaines résolutions de $\mathbb{C}^n/G$. Nous intéressons ici aux espaces de formes harmoniques L^2 sur ces variétés, puisque la dimension de ces espaces est un invariant de quasi isométrie, nous nous contentons de décrire la géométrie de ces variétés à quasi-isométries près et au dehors d'un compact. La construction part d'un sous-groupe fini de $G \subset SU(n)$ et d'une résolution localement en produit $\pi : X \to \mathbb{C}^n/G$ de la variété singulière. Rappelons d'abord ce qu'est une telle résolution :

5.1. **Résolution localement en produit.** On note $V=\mathbb{C}^n$ et I une indexation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ qui sont fixés par un sous groupe de G

$$\{V_i, i\in I\}=\{V^H, H \text{ sous}-\text{groupe de } G\}.$$

On note aussi

$$A_i=C(V_i)=\{g\in G, gv=v\ \forall v\in V_i\},$$
$$N(V_i)=\{g\in G,\ g(V_i)=V_i\},\quad \text{et } B_i=N(V_i)/A_i.$$

On suppose que $0,\infty\in I$ et que $V_0=V$ et $V_\infty=\{0\}=V^G$. On met sur I l'ordre partiel suivant :

$$i\le j\Leftrightarrow V_i\supset V_j$$

Si on note $W_i=V_i^\perp$ alors

$$i\le j\Leftrightarrow W_i\subset W_j.$$

On a donc $V/A_i\simeq (W_i/A_i)\times V_i$. On note aussi

$$\tilde S=\left(\cup_{i\in I\setminus\{0\}}V_i\right)/G$$

le lieu singulier de V/G. Et pour $i\in I$ on définit

$$S_i=\left(\bigcup_{j\in I\setminus\{0\}, i\not\geq j}V_j\right)/A_i=\left(\bigcup_{j\in I\setminus\{0\}, V_i\not\subset V_j}V_j\right)/A_i.$$

et

$$T_i=\{x\in V/A_i, d(A_ix,S_i)\le R\}.$$

Définition 5.1. $\pi : X\to\mathbb{C}^n/G$ est une résolution localement produit si pour tout $i\in I$, il y a une résolution $\pi_i : Y_i\to W_i/A_i$ (qui sera forcément aussi localement en produit) de W_i/A_i telle que si on note

$$U_i=(\pi_i\times \mathrm{Id})^{-1}(T_i)\subset Y_i\times V_i$$

alors il y a un biholomorphisme local $\psi_i : (Y_i\times V_i)\setminus U_i\longrightarrow X$ qui rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(Y_i\times V_i)\setminus U_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\pi_i\times\mathrm{Id}"] & X \arrow[d, "\pi"] \\
(W_i/A_i)\times V_i\setminus T_i \arrow[r, "\phi_i"] & V/G
\end{tikzcd}$$

où ϕ_i est l'application naturelle $\phi_i : (W_i/A_i)\times V_i\longrightarrow V/G$.

Le groupe G agit naturellement sur I, D. Joyce montre alors que lorsque (X,π) est une résolution localement en produit de V/G alors il existe un biholomorphisme $g : Y_i\longrightarrow Y_{g.i}$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_i"] & Y_{g.i} \arrow[d, "\pi_{g.i}"] \\
W_i/A_i \arrow[r, "g"] & W_{g.i}/A_{g.i}
\end{tikzcd}$$

On peut décrire ce qui se passe en dimension $n=3$. Soit donc $G\subset SU(3)$ un sous-groupe fini, si $g\in G\setminus\{\mathrm{Id}\}$ alors on a forcément $\dim\ker(g-\mathrm{Id})\le 1$. En particulier, si $I=\{0,1,...N,\infty\}$ alors on a $V_i\cap V_j=\{0\}$ si $i\ne j$ et $i,j\in\{1,...N\}$. Ceci signifie exactement que $\mathbb{S}^5/G$ n'a que des singularités isolées. Notons $S = \bigcup_{i=1}^N V_i$ et S^ε le ε-voisinage de S. La topologie à l'infini de X est le produit d'une résolution de $\mathbb{S}^5/G$ avec une demi-droite. Cette résolution de $\mathbb{S}^5/G$ peut être décrite topologiquement de la façon suivante : notons $B_i(\varepsilon)$ la boule de rayon ε dans W_i et $Y_i(\varepsilon) = \pi_i^{-1}(B_i(\varepsilon))$ Sur $\mathbb{S}^5 \setminus S^\varepsilon$, l'action de G est libre (pourvu que $\varepsilon > 0$ soit choisi assez petit) et le quotient est difféomorphe à $\Sigma_0 = (\mathbb{S}^5 \setminus S^\varepsilon)/G$

Supposons que l'action de G sur $\{1, ..., N\}$ ait l orbites $GV_1, ..., GV_l$. Alors le bord de $(\mathbb{S}^5 \setminus S^\varepsilon)/G$ a exactement l composantes connexes chacune difféomorphe à un

$$\begin{aligned} G.\big(\partial B_i(\varepsilon) \times (V_i \cap \mathbb{S}^5)\big)/G &= \big(\partial B_i(\varepsilon) \times (V_i \cap \mathbb{S}^5)\big)/N(V_i) \\ &= \big((\partial B_i(\varepsilon)/A_i) \times (V_i \cap \mathbb{S}^5)\big)/B_i. \end{aligned}$$

Pour $i = 1, ..., l$, nous notons

$$\begin{aligned} \Sigma_i &= G.\big(Y_i(\varepsilon) \times (V_i \cap \mathbb{S}^5)\big)/G \\ &= \big(Y_i(\varepsilon) \times (V_i \cap \mathbb{S}^5)\big)/B_i. \end{aligned}$$

Alors cette résolution de $\mathbb{S}^5/G$ est difféomorphe à

$$\Sigma_0 \#(\cup_{i\in\{1,\dots,l\}} \Sigma_i)$$

Ou on a recollé chaque $\big(\partial B_i(\varepsilon) \times (V_i \cap \mathbb{S}^5)\big)/B_i$ avec

$$\big(\partial Y_i(\varepsilon) \times (V_i \cap \mathbb{S}^5)\big)/B_i \subset \big(Y_i(\varepsilon) \times (V_i \cap \mathbb{S}^5)\big)/B_i.$$

5.2. **Métrique Quasi-Asymptotiquement-Localement-Euclidienne (QALE).** Une métrique Quasi-Asymptotiquement-Localement-Euclidienne (QALE pour faire court) asymptote à $\mathbb{C}^n/G$ sur une résolution localement en produit $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^n/G$ est une métrique g sur X telle que dans le cadre de la définition précédente $\psi_i^* g$ soit asymptote à la métrique produit $g_i \oplus h_i$, où h_i est une métrique QALE sur Y_i et h_i la métrique euclidienne sur V_i.

La vitesse à laquelle $\psi_i^* g$ tend vers la métrique produit dépend des distances à S_i et à l'origine. Puisque nous intéressons qu'à la classe de quasi isométrie de ces variétés, nous ne retiendrons que $\psi_i^* g$ est la métrique produit $g_i \oplus h_i$.

5.3. **Cas des groupes G de longueur 2.** Nous intéressons en fait à la classe la plus simple des variétés QALE (après celle où G agit sans point fixe sur $\mathbb{S}^{2n-1}$, la variété étant alors ALE).

Définition 5.2. Soit G un sous groupe de $SU(n)$, on appelle longueur de G,

$$L(\mathbb{C}^n, G) = \max\{k, \text{ il y a } i_0 < i_1 ... < i_k, i_j \in I\}.$$

Ainsi la longueur de G vaut 1 si et seulement si $S = \{0\}$ i.e. si et seulement si G agit sans point fixe sur $\mathbb{S}^{2n-1}$. Et la longueur de G vaut 2 si et seulement si les singularités de $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ sont isolées ; par exemple lorsque $G \subset \mathrm{SU}(3)$ ou $G \subset \mathrm{Sp}(2)$, on a forcément $L(\mathbb{C}^3, G) \leq 2$.

Lorsque la longueur de G vaut 1, une métrique ALE sur une résolution de $\mathbb{C}^n/G$ est au dehors d'un compact quasi isométrique à une métrique plate sur $(\mathbb{C}^n \setminus B(R))/G$.

On peut aussi décrire la géométrie de variétés QALE asymptote à $\mathbb{C}^n/G$ lorsque la longueur de G est 2 :

On numérote $G.V_1, ..., G.V_l$, les différentes orbites de $I \setminus \{0, \infty\}$ sous l'action de G. Le sous groupe A_i agit sans point fixe sur $W_i \setminus \{0\}$ et notons $\pi_i : Y_i \to W_i/A_i$

une résolution localement en produit de W_i/A_i. Si $y \in Y_i$ on note $|y| = \|\pi_i(y)\|$ et $\mathbb{B}$ la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Chaque Y_i est donc muni une métrique g_i plate au dehors d'un compact. On équipe maintenant $Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})$ de la métrique produit et on définit

$$C_i = \{(y, v) \in Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), |y| \leq 2\varepsilon|v|\}$$

Lorsque $g \in G$ on a donc une application $g : C_i \to C_{g.i}$, notons E_i le quotient $G.C_i/G$, on a aussi $E_i = C_i/B_i$. Soit maintenant

$$E_0 = \Big(\mathbb{C}^n \setminus \big(\mathbb{B} \cup \{v \in \mathbb{C}^n, \exists i \; d(v, V_i) < \varepsilon d(v, W_i)\,\}\,\big)\Big)/G$$

Si on note $S_i^\varepsilon = \{v \in \mathbb{C}^n, d(v, V_i) \leq \varepsilon\}$ alors E_0 est un bout de cône sur $\big(\mathbb{S}^{2n-1} \setminus (\bigcup_{i>1} S_i^\varepsilon)\big)/G$. Pour ε assez petit les $S_i^{2\varepsilon}$ sont deux à deux disjoints et à quasi isométrie près nous identifions :

$$X \setminus \pi^{-1}(\mathbb{B}) = \cup_{i=0}^{l} E_i$$

où

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \text{ lorsque } i \neq j \text{ et } i, j \neq 0$$

$$\text{et } E_i \cap E_0 = C_1\big(\,\big((S_i^{2\varepsilon} \cap \mathbb{S}^{2n-1}) \setminus S_i^\varepsilon\big)\,/G\big)$$

6. L^2 cohomologie des variétés QALE de rang 2.

Nous allons maintenant déterminer la cohomologie L^2 des variétés QALE asymptotes à $\mathbb{C}^n/G$ où $G \subset \mathrm{SU}(n)$ est tel que le quotient $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ n'a que des singularités isolées. Soit X une telle variété, rappelons qu'au dehors d'un compact $K \subset X$, $\mathcal{O} = X \setminus K$ est la réunion de $E_0, E_1, ..., E_l$. Où pour $\varepsilon > 0$ assez petit :

E_0 est un bout de cône sur $(\mathbb{S}^{2n-1} \setminus S^\varepsilon)/G$ avec

$$S = \{v \in \mathbb{S}^{2n-1}, \; \exists g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}, gv = v\}$$

et

$$S^\varepsilon = \{v \in \mathbb{S}^{2n-1}, d(v, S) < \varepsilon\}.$$

L'ensemble S est en fait une réunion de sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ ne s'intersectant qu'en $\{0\}$ et G agit sur cette famille de sous-espaces vectoriels. On suppose

$$S = \cup_{i=1}^{l} G.V_i$$

avec

$$G.V_i \cap G.V_j = \{0\} \;\text{ si }\; i \neq j.$$

Notons $W_i = V_i^\perp$, $A_i = \{g \in G, \forall v \in V_i, gv = v\}$, $N(V_i) = \{g \in G, g(V_i) = V_i\}$ et $B_i = N(V_i)/A_i$. Soit $\pi_i : Y_i \to W_i/A_i$ une résolution de W_i/A_i équipée d'une métrique ALE asymptote à W_i/A_i alors on suppose que B_i agit sur $Y_i \times V_i$ et $E_i = \widehat{E}_i/B_i$ où

$$\widehat{E}_i = \{(y, v) \in Y_i \times V_i, \; \varepsilon < |v|, \; |\pi_i(y)| < 2\varepsilon|v|\}.$$

alors $E_i \cap E_0$ est quasi isométrique à un bout de cône sur $\left(\mathbb{S}_{W_i}/A_i \times \mathbb{S}_{V_i} \times]\varepsilon, 2\varepsilon[\right)/B_i$ où on note $\mathbb{S}_V = \mathbb{S}^{2n-1} \cap V$ la sphère unité d'un sous espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^n$.

6.1. **La cohomologie de $X \setminus K$.** On commence par calculer la cohomologie de $\mathcal{O} = X \setminus K$. On sait que $\mathcal{O}$ se rétracte sur ∂K et que $\partial K = \cup_{i=0}^{l} \Sigma_i$ où $\Sigma_0 = (\mathbb{S}^{2n-1} \setminus S^{\varepsilon})/G$ et $\Sigma_i = \{(y,v) \in Y_i \times \mathbb{S}_{V_i}, |y| < 2\varepsilon\}/B_i$. Compte tenu du fait que la cohomologie de la sphère $\mathbb{S}^{2n-1}$ est nulle en degré $k \neq 0, 2n-1$, on a pour les degrés $k \in]0, 2n-2[$:

$$H^k(\Sigma_0) \oplus H^k(S)^G \simeq H^k(\partial \Sigma_0). \tag{6.1}$$

Et compte tenu du fait que $H^{2n-2}(S) = \{0\}$, nous obtenons aussi :

$$\{0\} \to H^{2n-2}(\Sigma_0) \to H^{2n-2}(\partial\Sigma_0) \simeq \mathbb{R}^l \to H^{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1})^G \simeq \mathbb{R} \to \{0\}. \tag{6.2}$$

où si un groupe G agit linéairement sur un espace vectoriel H on a noté H^G, le sous espaces des vecteurs G-invariants. On utilisera la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$\bigoplus_{i=0}^{l} H^{k-1}(\Sigma_i) \to H^{k-1}(\partial\Sigma_0) \to H^k(\partial K) \to \bigoplus_{i=0}^{l} H^k(\Sigma_i) \to H^k(\partial \Sigma_0). \tag{6.3}$$

Notons $n_i = \dim V_i$. Remarquons que B_i agit trivialement sur la cohomologie de $\mathbb{S}_{V_i}$ ainsi

$$H^k(S)^G = \bigoplus_{i=1}^{l} H^k(\mathbb{S}_{V_i})$$

et

$$H^k(\Sigma_i) = H^k(Y_i)^{B_i} \oplus H^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i}.$$

En particulier, l'application $H^k(\Sigma_i) \to H^k(\mathbb{S}_{V_i})$ est surjective. Avec (6.1), on en déduit que pour $k \neq 0, 2n-2, 2n-1$, l'application

$$\bigoplus_{i=0}^{l} H^k(\Sigma_i) \to H^k(\partial\Sigma_0)$$

est surjective. Et donc pour $k \neq 0, 1, 2n-2, 2n-1$, la suite exacte (6.3) implique que

$$\{0\} \to H^k(\partial K) \to \bigoplus_{i=0}^{l} H^k(\Sigma_i) \to H^k(\partial\Sigma_0) \simeq H^k(\Sigma_0) \bigoplus H^k(S)^G \to \{0\};$$

ainsi pour ces degrés $H^k(\partial K)$ est isomorphe à

$$\bigoplus_{i=1}^{l} \ker\left(H^k(\Sigma_i) \to H^k(\mathbb{S}_{V_i})^{B_i}\right) = \bigoplus_{i, k > 2n_i - 1} H^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_i H^k(Y_i)^{B_i}.$$

Pour les degrés $k = 1, 2n-2$: on obtient notamment grâce à (6.3) :

$$H^1(\partial K) \simeq \bigoplus_{i \geq 1} H^1(Y_i)^{B_i}$$

Mais, nous avons toujours $2n_i - 1 \geq 1$, en conséquence il est aussi vrai que :

$$H^1(\partial K) \simeq \bigoplus_{i, 1 > 2n_i - 1} H^{1-2n_i+1}(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_i H^1(Y_i)^{B_i}.$$

Nous obtenons aussi avec (6.2) :

$$H^{2n-2}(\partial K) \simeq \bigoplus H^{2\dim Y_i - 1}(Y_i)^{B_i}.$$

Mais puisqu'on a toujours $4 \leq \dim Y_i = 2n - 2n_i \leq 2n - 2$, il est aussi vrai que

$$H^{2n-2}(\partial K) \simeq \bigoplus_{i,2n-2>2n_i-1} H^{2n-2-2n_i+1}(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_i H^{2n-2}(Y_i)^{B_i}.$$

On obtient donc

Proposition 6.1. *Pour $k \notin \{0, 2n-1\}$*

$$H^k(\mathcal{O}) = H^k(\partial K) = \bigoplus_{i,k>2n_i-1} H^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_i H^k(Y_i)^{B_i}.$$

6.2. **Cohomologie L^2 de $\mathcal{O}$.** Nous considérons sur $\mathcal{O}$ les poids $\bar{w}(x) = |x|^{-2}$ et $w(x) = |x|^{-2}(1 + |\log x|)^{-2}$ où si $\pi : \mathcal{O} \to \mathbb{C}^n/G$, on note $|x| = \|\pi(x)\|$. On sait que

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i \geq 0} E_i$$

et que E_0, $E_0 \cap E_i$ sont des bouts de cônes on sait que l'image de d y est presque fermée en tout degré et par rapport au poids w, de plus on connaît leurs cohomologies L^2. On doit donc maintenant calculer la cohomologie L^2 de E_i.

6.2.1. *Cohomologie L^2 de E_i.* On sait que $E_i = \widehat{E}_i/B_i$ et donc :

$$\mathbb{H}^k(E_i) = \mathbb{H}^k(\widehat{E}_i)^{B_i}.$$

$\widehat{E}_i$ est une partie de $Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})$ (on note $\mathbb{B}$ la boule unité de $\mathbb{C}^n$). Sur $\widehat{E}_i$, $\bar{w}$ est comparable $\bar{w}'(y,v) = \|v\|^{-2}$ et w à $w'(y,v) = \|v\|^{-2}(1 + |\log \|v\||)^{-2}$. Notons également $\bar{w}_1(y,v) = |y|^{-2}$.

Nous commençons par remarquer que (4.15) :

$$\mathbb{H}^k(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})) \simeq \bigoplus_{p+q=k} \mathbb{H}^p(Y_i) \otimes \mathbb{H}^q(V_i \setminus \mathbb{B})$$

De plus si $Y_i^\varepsilon = \{y \in Y_i, |y| < \varepsilon\}$ alors puisque l'application $\mathbb{H}^p(Y_i) \to \mathbb{H}^p(Y_i^\varepsilon) = H^p(Y_i^\varepsilon)$ est injective (cf. 4.13), il en est de même de l'application

$$\mathbb{H}^k\big(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})\big) \to \mathbb{H}^k\left(Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B})\right).$$

Ainsi puisque $Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}) \subset \widehat{E}_i \subset Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})$, l'application de restriction :

$$\iota^*_{\widehat{E}_i} : \mathbb{H}^k(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})) \to \mathbb{H}^k(\widehat{E}_i)$$

est aussi injective.

On suppose maintenant que $k < n$. Soit $\alpha \in B^k(\widehat{E}_i)$. Posons

$$\Omega_i = C_1(]\varepsilon/2, 2\varepsilon[\times \mathbb{S}^{2m_i-1} \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \subset \widehat{E}_i$$

où $n_i = \dim_{\mathbb{C}} V_i$ et $m_i = n - n_i$. Puisque $Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}) = \widehat{E}_i \cup V_i$ avec $V_i \cap \widehat{E}_i = \Omega_i$, nous avons

$$\iota^*_{\Omega_i}\alpha \in B^k(\Omega_i) = d\mathcal{C}^{k-1}_{\bar{w},1}(\Omega_i),$$

il y a donc $\psi \in \mathcal{C}^{k-1}_{\bar{w},1}(\Omega_i)$ tel que

$$\iota^*_{\Omega_i}\alpha = d\psi$$

Maintenant grâce à (3.16), nous savons qu'il existe $\bar{\psi} \in \mathcal{C}^{k-1}_{\bar{w},1}(\widehat{E}_i)$ tel que $\iota^*_{\Omega_i}\bar{\psi} = \psi$. En particulier, l'extension par zéro de $\alpha - d\bar{\psi}$ à $Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})$ est fermée :

$$\alpha - d\bar{\psi} \in Z^k(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}))$$

Mais l'image de la classe de cohomologie L^2 de cette forme par $\iota^*_{\widehat{E}_i}$ est la classe de cohomologie de $\alpha \in B^k(\widehat{E}_i)$, puisque cette application est injective, la proposition (4.15) nous permet de trouver $u \in \mathcal{C}^{k-1}_{\bar{w}_1,1}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}))$ et $v \in \mathcal{C}^{k-1}_{w',1}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}))$ tels que

$$\alpha - d\bar{\psi} = du + dv$$

Compte tenu du fait que sur $\widehat{E}_i$: $\bar{w}_1 \geq Cw'$ et que w' et comparable à w, alors

$$\phi = \bar{\psi} + \iota^*_{\widehat{E}_i}(u + v) \in \mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(\widehat{E}_i) \text{ et } \alpha = d\phi.$$

Si nous partons d'un $\alpha \in Z^k(\widehat{E}_i)$ alors puisque $Z^k(\Omega_i) = B^k(\Omega_i)$ lorsque $k < n$, alors nous obtenons qu'en fait l'application :

$$\iota^*_{\widehat{E}_i} : \mathbb{H}^k(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})) \to \mathbb{H}^k(\widehat{E}_i)$$

est un isomorphisme. Remarquons également que puisque l'application d'extension par zéro

$$H^p_c(Y_i) \simeq \mathbb{H}^p(Y_i^\varepsilon, \partial Y_i^\varepsilon) \to \mathbb{H}^p(Y_i)$$

est surjective (cf. 4.13), il en est de même de l'application :

$$\mathbb{H}^k(Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}), \partial Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B})) \to \mathbb{H}^k(\widehat{E}_i).$$

Nous avons donc démontré :

Proposition 6.2. *Si $k < n$, alors $d\mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(\widehat{E}_i) = B^k(\widehat{E}_i) =$ de plus*

$$\mathbb{H}^k(\widehat{E}_i) \simeq \oplus_{p+q=k}\mathbb{H}^p(Y_i) \otimes \mathbb{H}^q(V_i \setminus \mathbb{B}) = \begin{cases} \mathbb{H}^{k-2n_i+1}(Y_i) & \text{si } n_i > 1 \\ \{0\} & \text{si } n_i = 1. \end{cases}$$

Et l'application d'extension par zéro

$$\mathbb{H}^k(Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}), \partial Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B})) \to \mathbb{H}^k(\widehat{E}_i)$$

est surjective.

En considérant la cohomologie relative à $Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}$, nous obtenons également :

Proposition 6.3. *Si $k > n$, alors $d\mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) = B^k(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ de plus*

$$\mathbb{H}^k(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \simeq \oplus_{p+q=k}\mathbb{H}^p(Y_i) \otimes \mathbb{H}^q(V_i \setminus \mathbb{B}, \mathbb{S}^{2n_i-1}) = \begin{cases} \mathbb{H}^{k-1}(Y_i) & \text{si } n_i > 1 \\ \{0\} & \text{si } n_i = 1 \end{cases}$$

Et l'application d'extension par zéro

$$\mathbb{H}^k(Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}), \partial Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}) \cup Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \to \mathbb{H}^k(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}))$$

est surjective.

Il reste maintenant à déterminer la cohomologie L^2 de $\widehat{E}_i$ en degré n. Le raffinement présenté en (4.10) montre que cette même preuve est valide lorsque $b_{n-1}(\mathbb{S}^{2m_i-1} \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) = 0$, c'est à dire lorsque $n_i \neq m_i$. Et même mieux si de plus $n_i > 1$ alors, on trouve que $d\mathcal{C}^{n-1}_{\bar{w},1}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) = B^n(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$.

Supposons donc que $n_i = m_i = n/2$. Alors nous avons forcément $n_i \geq 2$. Notons : $\rho = (\log(\|v\| + 1)^{-2}$. On reprend nos arguments si $\alpha \in Z^n(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$, alors nous trouvons comme précédemment $\psi \in \mathcal{C}^{n-1}_{w,1}(\Omega_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ tel que

$$\iota^*_{\Omega_i}\alpha = d\psi$$

Maintenant grâce à (3.16), nous savons qu'il existe $\bar\psi \in \mathcal{C}^{n-1}_{w',\rho}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ tel que $\iota^*_{\Omega_i}\bar\psi = \psi$. En particulier, l'extension par zéro de $\alpha - d\bar\psi$ à $Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})$est fermée :

$$\alpha - d\bar\psi \in Z^n_\rho(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}).$$

Les mêmes causes produisant les mêmes effets, il est également vrai que l'application :

$$\iota^*_{\widehat{E}_i} : \mathbb{H}^n_\rho(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \to \mathbb{H}^n_\rho(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$$

est injective. Et puisque $n_i > 1$, d'après (4.17), l'application naturelle :

$$\mathbb{H}^n(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \to \mathbb{H}^n_\rho(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$$

est un isomorphisme.

Mais l'image de la classe de cohomologie L^2_ρ de $\alpha - d\bar\psi$ par $\iota^*_{\widehat{E}_i}$ est la classe de cohomologie de $\alpha \in Z^k_\rho(\widehat{E}_i)$, la proposition (4.17) nous permet de trouver $u \in \mathcal{C}^{k-1}_{\bar w_1,\rho}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$, $v \in \mathcal{C}^{k-1}_{\bar w,\rho}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ et $h \in \mathcal{H}^n(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ tels que

$$\alpha - d\bar\psi = h + du + dv$$

Si on pose $\phi = \psi + \iota^*_{\widehat{E}_i}(u+v)$ alors $\alpha = \iota^*_{\widehat{E}_i} h + d\phi$ et $\phi \in L^2_w(\Lambda^{n-1}T^*(E_i))$. Nous avons ainsi montrer que la proposition (6.3) est encore valide pour $k = n$.

En revenant à E_i, nous obtenons

Proposition 6.4. *i) Si $k < n$, alors $d\mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(E_i) = B^k(E_i)$ de plus*

$$\mathbb{H}^k(E_i) \simeq \oplus_{p+q=k}\mathbb{H}^p(Y_i)^{B_i} \otimes \mathbb{H}^q(V_i \setminus \mathbb{B})^{B_i} = \begin{cases} \mathbb{H}^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i} & \text{si } n_i > 1 \\ \{0\} & \text{si } n_i = 1 \end{cases}$$

Et l'application d'extension par zéro

$$\mathbb{H}^k((Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}))/B_i, (\partial Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}))/B_i) \to \mathbb{H}^k(E_i)$$

est surjective.

ii) Si $k \geq n$, alors $d\mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(E_i, \partial\mathcal{O}) = B^k(E_i, \partial\mathcal{O})$ de plus

$$\mathbb{H}^k(E_i, \partial\mathcal{O}) \simeq \oplus_{p+q=k}\mathbb{H}^p(Y_i)^{B_i} \otimes \mathbb{H}^q(V_i \setminus \mathbb{B}, \mathbb{S}^{2n_i-1})^{B_i} = \begin{cases} \mathbb{H}^{k-1}(Y_i)^{B_i} & \text{si } n_i > 1 \\ \{0\} & \text{si } n_i = 1 \end{cases}$$

Et l'application d'extension par zéro

$$\mathbb{H}^k((Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}))/B_i, \partial\mathcal{O} \cup (\partial Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}))/B_i) \to \mathbb{H}^k(E_i)$$

est surjective.

6.2.2. *Cohomologie L^2 de $\mathcal{O}$.* Nous pouvons maintenant déterminer la cohomologie L^2 de $\mathcal{O}$. Nous commençons en degré $k < n$. Remarquons que puisque

$$(Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}))/B_i \subset \mathcal{O}$$

et que

$$\mathbb{H}^k((Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}))/B_i, (\partial Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}))/B_i) \to \mathbb{H}^k(E_i) \to \{0\}$$

surjective alors l'application

$$\mathbb{H}^k(\mathcal{O}) \to \bigoplus_{i\geq 1}\mathbb{H}^k(E_i)$$

est surjective. Nous allons montrer que cette application est injective : soit donc $\alpha \in Z^k(\mathcal{O})$ tel que pour tout $i \geq 1$:

$$\iota_{E_i}^* \alpha \in B^k(E_i) = d\mathcal{C}_{w,1}^{k-1}(E_i).$$

Remarquons que puisque $k < n$, et que E_0 est un bout de cône, on sait que

$$\iota_{E_0}^* \alpha \in B^k(E_0) = d\mathcal{C}_{w,1}^{k-1}(E_0).$$

On trouve donc pour chaque $i \geq 0$, $\psi_i \in \mathcal{C}_{w,1}^{k-1}(E_i)$ tel que

$$\iota_{E_i}^* \alpha = d\psi_i$$

Pour $i \geq 1$, nous posons alors

$$\eta_i = \iota_{E_i \cap E_0}^* \psi_i - \iota_{E_i \cap E_0}^* \psi_0 \in Z_w^{k-1}(E_i \cap E_0).$$

Mais $E_i \cap E_0$ est un bout de cône et $k-1 < n-1$, donc d'après (4.9) nous avons

$$Z_w^{k-1}(E_i \cap E_0) = B_w^{k-1}(E_i \cap E_0) = d\mathcal{C}_{\bar{w},w}^{k-2}(E_i \cap E_0)$$

Alors grâce à (3.16), nous trouvons $u_i \in \mathcal{C}_{\bar{w},w}^{k-2}(E_i)$ tel que

$$d(\iota_{E_i \cap E_0}^* u_i) = \eta_i.$$

La forme ψ définie sur $\mathcal{O}$ par $\iota_{E_0}^* \psi = \psi_0$ et $\iota_{E_i}^* \psi = \psi_i - du_i$ est bien un élément de $\mathcal{C}_{w,1}^{k-1}(E_i)$ et

$$d\psi = \alpha.$$

Puisque w est à décroissance parabolique, nous avons montré que $\alpha \in B^k(\mathcal{O})$ et aussi que l'image de d est presque fermée sur $\mathcal{O}$ en degré $k < n$ par rapport au poids w.

Évidemment une preuve identique permet de conclure en degré $k > n$ et pour la cohomologie L^2 de $\mathcal{O}$ relative à $\partial\mathcal{O}$.

Nous traitons maintenant le cas de degré $k = n$ pour la cohomologie L^2 relative :

Il nous faut donc démontrer que si $\alpha \in Z^n(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O})$ est tel que

$$\forall i \geq 1,\ \iota_{E_i}^* \alpha \in B^k(E_i, \partial\mathcal{O})$$

alors

$$\alpha \in d\mathcal{C}_{w,1}^{n-1}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}).$$

Remarquons que si pour tout $i \geq 1$, nous avons $b_{n-2}(E_i \cap E_0) = 0$ (par exemple si n est pair) alors la preuve précédente est valide. Nous supposons donc que n est impair. Alors on remarque que $b_{n-1}(\Sigma_0) = 0$ et que pour tout $i \geq 1$, $b_{n-1}(\mathbb{S}^{2m_i-1} \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) = 0$. Ainsi grâce à (4.10), nous pouvons trouver $\psi_0 \in \mathcal{C}_{\bar{w},1}^{n-1}(E_0, \partial\mathcal{O})$ telle que

$$\iota_{E_0}^* \alpha = d\psi_0.$$

Nous savons également qu'il existe $\psi_i \in \mathcal{C}_{w,1}^{n-1}(E_i, \partial\mathcal{O})$ tel que

$$\iota_{E_i}^* \alpha = d\psi_i$$

Pour $i \geq 1$, nous posons alors

$$\eta_i = \iota_{E_i \cap E_0}^* \psi_i - \iota_{E_i \cap E_0}^* \psi_0 \in Z_w^{n-1}(E_i \cap E_0, \partial\mathcal{O}).$$

(1) Si $b_{n-2}(E_i \cap E_0) = 0$, alors comme précédemment nous trouvons $u_i \in \mathcal{C}_{\bar{w},w}^{k-2}(E_i, \partial\mathcal{O})$ tel que

$$d(\iota_{E_i \cap E_0}^* u_i) = \eta_i.$$

(2) Si maintenant $b_{n-2}(E_i \cap E_0) \neq 0$ mais que $n_i > 1$, alors la preuve précédente montre que nous pouvons en fait supposer que $\psi_i \in \mathcal{C}^{n-1}_{\bar{w},1}(E_i, \partial\mathcal{O})$ et donc que

$$\eta_i \in Z^{n-1}_{\bar{w}}(E_i \cap E_0, \partial\mathcal{O}) = B^{n-1}_{\bar{w}}(E_i \cap E_0, \partial\mathcal{O}) = d\mathcal{C}^{n-2}_{w,\bar{w}}(E_i \cap E_0, \partial\mathcal{O})$$

On trouve donc $u_i \in \mathcal{C}^{n-2}_{w,w}(E_i, \partial\mathcal{O})$ tel que

$$d(\iota^*_{E_i \cap E_0} u_i) = \eta_i.$$

(3) Il reste le cas où $n_i = 1$ et $b_{n-2}(E_i \cap E_0) \neq 0$ c'est à dire le cas où $n = 3$. Dans ce cas grâce au raffinement proposé en (4.10,ii) nous trouvons $u \in \mathcal{C}^1_{\bar{w},w}(E_i \cap E_0, \partial\mathcal{O})$ et

$$v = f(|x|)\sigma \in \mathcal{C}^1_{w,w}(E_i \cap E_0, \partial\mathcal{O})$$

où σ est le tiré en arrière de la forme "volume" de $\mathbb{S}^1$ sur

$$E_i \cap E_0 = \simeq C_1(]\varepsilon/2, 2\varepsilon[\times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1)/B_i$$

tel que $\eta = du + dv$ Nous pouvons évidemment trouver $\bar{u} \in \mathcal{C}^1_{\bar{w},w}(E_i, \partial\mathcal{O})$ tel que $\iota^*_{E_i \cap E_0}\bar{u} = u$ et On peut aisément étendre v à E_i grâce à

$$\bar{v} = f(s(x))\sigma \tag{6.4}$$

où on définit d'abord s sur $\widehat{E}_i$ par

$$s(y, v) = \begin{cases} \sqrt{|y|^2 + \|v\|^2} & \text{si } |y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\|v\| \\ \sqrt{1 + (\varepsilon/2)^2}\|v\| & \text{si } |y| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|v\| \end{cases},$$

cet fonction est clairement B_i invariante et $\bar{v}$ est bien définie et il est clair que $\bar{v} \in \mathcal{C}^1_{w,w}(E_i, \partial\mathcal{O})$. On pose alors $u_i = \bar{u} + \bar{v} \in \mathcal{C}^1_{w,w}(E_i, \partial\mathcal{O})$ et nous avons également

$$d(\iota^*_{E_i \cap E_0} u_i) = \eta_i.$$

La forme ψ définie sur $\mathcal{O}$ par $\iota^*_{E_0}\psi = \psi_0$ et $\iota^*_{E_i}\psi = \psi_i - du_i$ est bien un élément de $\mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(E_i, \partial\mathcal{O})$ et

$$d\psi = \alpha.$$

Nous avons donc démontré que :

Proposition 6.5. *i) Si $k < n$, alors $d\mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(\mathcal{O}) = B^k(\mathcal{O})$ et*

$$\mathbb{H}^k(\mathcal{O}) = \bigoplus_{i, n_i > 1} \mathbb{H}^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i}.$$

ii) Si $k \geq n$, alors $d\mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) = B^k(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O})$ et

$$\mathbb{H}^k(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) = \bigoplus_{i, n_i > 1} \mathbb{H}^{k-1}(Y_i)^{B_i}.$$

6.3. **Cohomologie L^2_w de $\mathcal{O}$.** Les mêmes arguments que précédemment nous permettent de démontrer que

i) Si $k < n$, alors $B_w^{k-1}(\mathcal{O}) = d\mathcal{C}_{w,w}^{k-2}(\mathcal{O})$ et

$$\mathbb{H}_w^{k-1}(\mathcal{O}) = \bigoplus_{p+q=k-1} \mathbb{H}^p(Y_i)^{B_i} \otimes \mathbb{H}_w^q(\mathbb{C}^{n_i} \setminus \mathbb{B}) = \bigoplus_i \mathbb{H}^{k-2n_i}(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_{i,n_i=1} \mathbb{H}^{k-1}(Y_i)^{B_i}$$

ii) Si $k > n$, alors $B_w^{k-1}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = d\mathcal{C}_{w,w}^{k-2}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ et

$$\mathbb{H}_w^{k-1}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) = \bigoplus_{p+q=k-1} \mathbb{H}^p(Y_i)^{B_i} \otimes \mathbb{H}_w^q(\mathbb{C}^{n_i} \setminus \mathbb{B}, \mathbb{S}^{2n_i-1}) = \bigoplus_{i,n_i>2} \mathbb{H}^{k-2}(Y_i)^{B_i}.$$

Comme précédemment le point délicat est le cas de degré $k-1 = n-1$. Nous reprenons nos arguments en commençant par calculer la cohomologie L^2_w de $\widehat{E}_i$ en degré $n-1$, celui ci se traite de façon similaire au cas de la cohomologie L^2 :

(1) Si $b_{n-2}(\mathbb{S}^{2m_i-1} \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) = 0$, alors nous montrons comme précédemment que
$$B_w^{n-1}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) = d\mathcal{C}_{w,w}^{n-2}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1});$$
et que
$$\mathbb{H}_w^{n-1}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) = \mathbb{H}_w^{n-1}(Y_i \times (\mathbb{C}^{n_i} \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$$
avec de plus si $n_i \neq 2$:
$$B_w^{n-1}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) = d\mathcal{C}_{\bar{w},w}^{n-2}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$$

(2) Supposons maintenant que $b_{n-2}(\mathbb{S}^{2m_i-1} \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \neq 0$, c'est à dire que $|n_i - m_i| = 1$, alors nous avons deux cas :

   i) le premier est celui où $2n_i - 1 = n-2$: soit $\alpha \in B_w^{n-1}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ alors le raffinement présenté en (4.10) nous permet de trouver : $u \in \mathcal{C}_{\bar{w},w}^{n-2}(\Omega_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ et $v \in \mathcal{C}_{w,w}^{n-2}(\Omega_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ tels que $v = f(r)\sigma$, σ étant le tiré en arrière de la forme volume de $\mathbb{S}^{2n_i-1}$ par la projection sur le dernier facteur de $\Omega_i = C_1(C_1(]\varepsilon/2, 2\varepsilon[\times \mathbb{S}^{2m_i-1} \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ et
$$\iota_{\Omega_i}^* \alpha = du + dv$$
   On peut alors comme (6.4) étendre u, v en $\bar{v}, \bar{u} \in \mathcal{C}_{w,w}^{n-2}(\Omega_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ et en posant $\bar{\psi} = \bar{u} + \bar{v}$, les arguments précédents mènent de la même façon au résultat voulu : l'extension par zéro de $\alpha - d\bar{\psi}$ à $Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})$ est fermée :
$$\alpha - d\bar{\psi} \in Z_{w'}^{n-1}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$$
   Mais l'image de la classe de cohomologie $L^2_{w'}$ de cette forme par $\iota_{\widehat{E}_i}^*$ est la classe de cohomologie de $\alpha \in B_{w'}^{n-1}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$, puisque comme précédemment cette application est injective, la proposition (4.17) nous permet de trouver $f \in \mathcal{C}_{\bar{w}_1,w'}^{n-2}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ et $g \in \mathcal{C}_{w',w'}^{n-2}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ tels que
$$\alpha - d\bar{\psi} = df + dg$$
   Compte tenu du fait que sur $\widehat{E}_i$: $\bar{w}_1 \geq Cw'$ et que w' et comparable à w, alors
$$\psi = \bar{\psi} + \iota_{\widehat{E}_i}^*(f+g) \in \mathcal{C}_{w,w}^{n-2}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}).$$

Ainsi

$$\mathcal{C}^{n-2}_{w,w}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) = B^{n-1}_w(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$$

et de la même façon l'application :

$$\iota^*_{\widehat{E}_i} : \mathbb{H}^{n-1}_{w'}(Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \to \mathbb{H}^{n-1}_{w'}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$$

est un isomorphisme et l'application d'extension par zéro

$$\mathbb{H}^{n-1}_{w'}(Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}), \partial(Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B})) \cup Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \to \mathbb{H}^{n-1}_{w'}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$$

est également surjective.

ii) Supposons maintenant que $2m_i - 1 = n - 2$, remarquons qu'alors $m_i = (n-1)/2$ et $n_i = m_i + 1$ puisque $m_i \geq 2$, ainsi $n_i \geq 3$. Soit donc $\alpha \in Z^{n-1}_{w'}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$, alors nous trouvons comme précédemment $\psi \in \mathcal{C}^{n-2}_{w',w'}(\Omega_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ tel que

$$\iota^*_{\Omega_i}\alpha = d\psi$$

Maintenant grâce à (3.16), nous savons qu'il existe $\bar{\psi} \in \mathcal{C}^{n-1}_{w',\rho w'}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ tel que $\iota^*_{\Omega_i}\bar{\psi} = \psi$. En particulier, l'extension à $Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})$ par zéro de $\alpha - d\bar{\psi}$ est fermée :

$$\alpha - d\bar{\psi} \in Z^{n-1}_{\rho w'}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})).$$

Les mêmes causes produisant les mêmes effets, il est également vrai que l'application :

$$\iota^*_{\widehat{E}_i} : \mathbb{H}^{n-1}_{\rho w'}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \to \mathbb{H}^{n-1}_{\rho w'}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$$

est injective. Et également d'après (4.17), l'application naturelle :

$$\mathbb{H}^{n-1}_{w'}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \to \mathbb{H}^{n-1}_{\rho w'}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$$

est un isomorphisme

Mais l'image de la classe de cohomologie $L^2_{\rho w'}$ de $\alpha - d\bar{\psi}$ par $\iota^*_{\widehat{E}_i}$ est la classe de cohomologie de $\alpha \in Z^{n-1}_{\rho w'}(\widehat{E}_i, Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$, la proposition (4.17) nous permet de trouver $u \in \mathcal{C}^{n-2}_{\bar{w}_1,\rho w'}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$, $v \in \mathcal{C}^{n-2}_{\bar{w}',\rho w'}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ et $h \in \mathcal{H}^{n-1}_{w'}(Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B}), Y_i \times \mathbb{S}^{2n_i-1})$ tels que

$$\alpha - d\bar{\psi} = h + du + dv$$

Si on pose $\phi = \psi + \iota^*_{\widehat{E}_i}(u+v)$ alors $\alpha = \iota^*_{\widehat{E}_i} h + d\phi$ et $\phi \in L^2_{(w')^2}(\Lambda^{n-2}T^*(E_i))$. Nous avons donc obtenu le même résultat qu'en (i).

En revenant à $E_i = \widehat{E}_i/B_i$, nous avons démontré que $d\mathcal{C}^{n-2}_{w,w}(E_i, \partial\mathcal{O}) = B^{n-1}_w(E_i, \partial\mathcal{O})$ même mieux si $|n_i - m_i| \neq 1$ et $n_i \neq 2$ alors

$$d\mathcal{C}^{n-2}_{\bar{w},w}(E_i, \partial\mathcal{O}) = B^{n-1}_w(E_i, \partial\mathcal{O}).$$

De plus

$$\mathbb{H}^{n-1}_w(E_i, \partial\mathcal{O}) \simeq \bigoplus_{p+q=n-1} \mathbb{H}^p(Y_i)^{B_i} \otimes \mathbb{H}^q_{w'}(V_i \setminus \mathbb{B}, \mathbb{S}^{2n_i-1})^{B_i} = \begin{cases} \mathbb{H}^{k-1}(Y_i)^{B_i} & \text{si } n_i > 2 \\ \{0\} & \text{si } n_i \leq 2 \end{cases}$$

Et l'application d'extension par zéro

$$\mathbb{H}^{n-1}_w((Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}))/B_i, \partial\mathcal{O} \cup (\partial Y_i^\varepsilon \times (V_i \setminus \mathbb{B}))/B_i) \to \mathbb{H}^{n-1}_w(E_i)$$

est surjective.

On peut maintenant calculer la cohomologie L^2_w de $\mathcal{O}$ relative à $\partial\mathcal{O}$ en degré $n-1$: pour les mêmes raisons l'application

$$\mathbb{H}^{n-1}_w(\mathcal{O},\partial\mathcal{O}) \to \bigoplus_{i\geq 1} \mathbb{H}^{n-1}_w(E_i,\partial\mathcal{O})$$

est surjective.

Il nous faut donc démontrer que si $\alpha \in Z^{n-1}_w(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})$ est tel que

$$\forall i \geq 1,\ \iota^*_{E_i}\alpha \in B^{n-1}_w(E_i,\partial\mathcal{O})$$

alors

$$\alpha \in d\mathcal{C}^{n-2}_{w,w}(\mathcal{O},\partial\mathcal{O}).$$

Premier cas: supposons que n est impair et $n > 3$, nous pouvons trouver $\psi_0 \in \mathcal{C}^{n-2}_{w,w}(E_0,\partial\mathcal{O})$ telle que

$$\iota^*_{E_0}\alpha = d\psi_0.$$

Nous savons également qu'il existe $\psi_i \in \mathcal{C}^{n-2}_{w,w}(E_i,\partial\mathcal{O})$ tel que

$$\iota^*_{E_i}\alpha = d\psi_i.$$

Pour $i \geq 1$, nous posons alors

$$\eta_i = \iota^*_{E_i\cap E_0}\psi_i - \iota^*_{E_i\cap E_0}\psi_0 \in Z^{n-2}_{w^2}(E_i\cap E_0,\partial\mathcal{O}).$$

mais puisqu'alors nous avons $b_{n-3}(\mathbb{S}^{2m_i-1}\times\mathbb{S}^{2n_i-1}) = 0$, la proposition (4.10), nous permet de trouver $u_i \in \mathcal{C}^{n-3}_{\bar{w},w^2}(E_i\cap E_0,\partial\mathcal{O})$ tel que $\eta_i = du_i$, on peut grâce à 3.16 étendre u_i en $\bar{u}_i \in \mathcal{C}^{n-3}_{\bar{w},w^2}(E_i,\partial\mathcal{O})$ et alors la forme ψ définie sur $\mathcal{O}$ par $\iota^*_{E_0}\psi = \psi_0$ et $\iota^*_{E_i}\psi = \psi_i - d\bar{u}_i$ est bien un élément de $\mathcal{C}^{n-2}_{w,w}(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})$ et

$$d\psi = \alpha.$$

Deuxième cas: si $n = 3$, alors nous n'avons clairement pas $b_{n-3}(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1) = 0$. Cependant grâce à (4.10), nous pouvons en fait trouver pour chaque $i > 0$, $f_i \in \mathcal{C}^0_{\bar{w},w^2}(E_i\cap E_0,\partial\mathcal{O})$ et $g_i \in \mathcal{C}^0_{w,w^2}(E_i\cap E_0,\partial\mathcal{O})$ une fonction radiale tel que

$$\eta_i = df_i + dg_i,$$

on étend alors aisément ces fonctions à E_i pour obtenir de même une fonction $\bar{u}_i \in \mathcal{C}^0_{w,w^2}(E_i,\partial\mathcal{O})$ tel que

$$\iota^*_{E_i\cap E_0}d\bar{u}_i = \eta_i,$$

Ceci permet alors de conclure comme précédemment.

Troisième cas: supposons que n est pair alors nous avons forcément pour tout i : $|n_i - m_i| \neq 1$ et également $b_{n-2}(\Sigma_0) = 0$, alors nous pouvons en fait trouver $\psi_0 \in \mathcal{C}^{n-2}_{\bar{w},w}(E_0,\partial\mathcal{O})$ tel que

$$\iota^*_{E_0}\alpha = d\psi_0.$$

Nous savons également qu'il existe $\psi_i \in \mathcal{C}^{n-2}_{w,w}(E_i,\partial\mathcal{O})$ tel que

$$\iota^*_{E_i}\alpha = d\psi_i.$$

Pour $i \geq 1$, nous posons alors

$$\eta_i = \iota^*_{E_i\cap E_0}\psi_i - \iota^*_{E_i\cap E_0}\psi_0 \in Z^{n-2}_{w^2}(E_i\cap E_0,\partial\mathcal{O}).$$

(1) Si $b_{n-3}(E_i \cap E_0) = 0$, alors comme précédemment nous trouvons $\bar{u}_i \in \mathcal{C}^{n-3}_{\bar{w},w^2}(E_i, \partial\mathcal{O})$ tel que
$$d(\iota^*_{E_i \cap E_0} \bar{u}_i) = \eta_i.$$
(2) Si maintenant $b_{n-3}(E_i \cap E_0) \neq 0$ et $n-3 = 2n_i - 1$ alors grâce à (4.10) et en reprenant l'argument utilisé dans (6.4) on trouve $\bar{u}_i \in \mathcal{C}^{n-3}_{w,w^2}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O})$ tel que
$$d(\iota^*_{E_i \cap E_0} u_i) = \eta_i.$$
(3) Il reste le cas où $b_{n-3}(E_i \cap E_0) \neq 0$ mais que $2m_i - 1 = n - 3$ et $2n_i - 1 = n + 1$, remarquons que puisque $m_i \geq 2$, nous avons forcément $n \geq 6$ et $n_i \geq 4 > 2$ en particulier, nous pouvions en fait choisir $\psi_i \in \mathcal{C}^{n-2}_{\bar{w},w}(E_i, \partial\mathcal{O})$ et alors $\eta_i \in Z^{n-2}_{\bar{w}w}(E_i \cap E_0, \partial\mathcal{O})$ et on trouve alors $u_i \in \mathcal{C}^{n-2}_{w,\bar{w}w}(E_i \cap E_0, \partial\mathcal{O})$ tel que $du_i = \eta_i$, cette forme peut être étendue en $\bar{u}_i \in \mathcal{C}^{n-2}_{w,ww}(E_i, \partial\mathcal{O})$.

La forme ψ définie sur $\mathcal{O}$ par $\iota^*_{E_0}\psi = \psi_0$ et $\iota^*_{E_i}\psi = \psi_i - d\bar{u}_i$ est bien un élément de $\mathcal{C}^{n-2}_{w,w}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O})$ et
$$d\psi = \alpha.$$

Nous avons donc obtenu :

Proposition 6.6. *i) Si $k < n$, alors $d\mathcal{C}^{k-2}_{w,w}(\mathcal{O}) = B^{k-1}_w(\mathcal{O})$ et*
$$\mathbb{H}^{k-1}(\mathcal{O}) = \bigoplus_i \mathbb{H}^{k-2n_i}(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_{i, n_i = 1} \mathbb{H}^{k-1}(Y_i)^{B_i}.$$
ii) Si $k \geq n$, alors $d\mathcal{C}^{k-2}_{w,w}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) = B^{k-1}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O})$ et
$$\mathbb{H}^{k-1}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) = \bigoplus_{i, n_i > 2} \mathbb{H}^{k-2}(Y_i)^{B_i}.$$

En conséquence pour $k < n$, les images de $d : \mathcal{C}^{k-2}_{w,w}(\mathcal{O}) \to L^2_w(\Lambda^{k-1}T^*\mathcal{O})$ et de $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(\mathcal{O}) \to L^2(\Lambda^k T^*\mathcal{O})$ sont fermées et l'espace $\mathbb{H}^{k-1}_w(\mathcal{O})$ est de dimension finie, grâce au théorème (3.15), il en est de même sur toute variété isométrique à $\mathcal{O}$ au dehors d'un compact ; par exemple pour les degrés $k < n$, les images de $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) \to L^2(\Lambda^k T^*\mathcal{O})$ et de $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(X) \to L^2(\Lambda^k T^* X)$ sont fermées. Grâce à la version relative du même théorème, on peut affirmer que pour $k \geq n$, les images de $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(\mathcal{O}) \to L^2(\Lambda^k T^*\mathcal{O})$ et de $d : \mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(X) \to L^2(\Lambda^k T^* X)$ sont fermées.

Nous devons également connaître la $L^2_{1/w}$ cohomologie de $\mathcal{O}$ relative à $\partial\mathcal{O}$ en degré $(k+1)$ pour $k \geq n$. Lorsque $k > n$, nous obtenons de la même façon que $d\mathcal{C}^k_{w,1/w}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) = B^{k+1}_{1/w}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O})$ et
$$\mathbb{H}^{k+1}_{1/w}(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) = \bigoplus_i \mathbb{H}^k(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_{i, n_i = 1} \mathbb{H}^{k-1}(Y_i)^{B_i}.$$

Concernant le degré $k = n+1$, nous pouvons reprendre les arguments précédents mais nous ne pouvons conclure que lorsque $n \neq 3$. En effet, ces arguments ne permettent pas dans ce cas de déterminer la $L^2_{1/w}$ cohomologie de $\widehat{E}_i$ relative à $Y_i \times (V_i \setminus \mathbb{B})$. Nous ne pouvons en effet conclure que lorsque $b_n(\mathbb{S}^{2m_i-1} \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) = 0$, ou lorsque $b_n(\mathbb{S}^{2m_i-1} \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \neq 0$ mais que $n_i > 1$ ou encore lorsque $n_i = 1$ mais $H^n(\mathbb{S}^{2m_i-1} \times \mathbb{S}^{2n_i-1}) \simeq H^n(\mathbb{S}^{2n_i-1})$; mais nous ne pouvons conclure dans le dernier cas où $b_n(\mathbb{S}^{2m_i-1}\times\mathbb{S}^{2n_i-1})\neq 0$, $n_i=1$ et $n=2m_i-1$, ce qui se produit exactement lorsque $n=3$. Nous obtenons ainsi :

Proposition 6.7. *Si $k\geq \max n,4$, alors $d\mathcal{C}^k_{w,1/w}(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})=B^{k+1}_{1/w}(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})$ et*

$$\mathbb{H}^{k+1}_{1/w}(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})=\bigoplus_i \mathbb{H}^k(Y_i)^{B_i}\oplus\bigoplus_{i,n_i=1}\mathbb{H}^{k-1}(Y_i)^{B_i}.$$

Nous pouvons maintenant déterminer la cohomologie L^2 de $\mathcal{O}$ en degré $k\geq\max\{n,4\}$. En effet, on dispose maintenant de la suite exacte :

$$H^{k-1}(\partial\mathcal{O})\longrightarrow\mathbb{H}^k(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})\longrightarrow\mathbb{H}^k(\mathcal{O})\longrightarrow H^k(\partial\mathcal{O})\longrightarrow\mathbb{H}^{k+1}_{1/w}(\mathcal{O},\partial\mathcal{O}).$$

Nos calculs de la cohomologie de ∂K (6.1) et de la cohomologie L^2 relative de $\mathcal{O}$ (6.5) montre que la première flèche de cette suite exacte est surjective, nous obtenons donc

$$\mathbb{H}^k(\mathcal{O})\simeq\ker\left(H^k(\partial\mathcal{O})\to\mathbb{H}^{k+1}_{1/w}(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})\right).$$

Puisque pour $k\in[1,2n-2]$

$$H^k(\partial\mathcal{O})=\bigoplus_{i,k>2n_i-1}H^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i}\oplus\bigoplus_i H^k(Y_i)^{B_i}$$

et

$$\mathbb{H}^{k+1}_{1/w}(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})=\bigoplus_{i,}\mathbb{H}^k(Y_i)^{B_i}\oplus\bigoplus_{i,n_i=1}\mathbb{H}^{k-1}(Y_i)^{B_i},$$

nous obtenons également :

$$\mathbb{H}^k(\mathcal{O})\simeq\bigoplus_{i,n_i>1}\mathbb{H}^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i}.$$

Pour $k=2n-1$, nous avons alors $\mathbb{H}^{2n}_{1/w}(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})=\{0\}$ et donc

$$\mathbb{H}^{2n-1}(\mathcal{O})\simeq H^{2n-1}(\mathcal{O})\simeq\mathbb{R}.$$

Remarquons que nous pouvons également déterminer la cohomologie L^2 de $\mathcal{O}$ en degré $n=3$, car nous avons

$$\mathbb{H}^3(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})=\{0\}$$

et grâce à la dualité induite par l'opérateur de Hodge nous obtenons également

$$\mathbb{H}^3(\mathcal{O})=\{0\}=\bigoplus_{i,n_i>1}\mathbb{H}^{3-2n_i+1}(Y_i)^{B_i}.$$

On peut de même déterminer la cohomologie L^2_w de $\mathcal{O}$ pour les degrés $k-1\geq n$ grâce à la suite exacte :

$$H^{k-2}(\partial\mathcal{O})\longrightarrow\mathbb{H}^{k-1}_w(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})\longrightarrow\mathbb{H}^{k-1}_w(\mathcal{O})\longrightarrow H^{k-1}(\partial\mathcal{O})\longrightarrow\mathbb{H}^k(\mathcal{O},\partial\mathcal{O}).$$

Comme précédemment la première flèche de cette suite est surjective et grâce à (6.6), on obtient également :

$$\mathbb{H}^{k-1}_w(\mathcal{O})\simeq\bigoplus_{i\geq 1}\mathbb{H}^{k-2n_i}(Y_i)^{B_i}\oplus\bigoplus_{i,n_i=1}\mathbb{H}^{k-1}(Y_i)^{B_i}.$$

Nous avons donc obtenu :

Proposition 6.8. *Pour $k \in [1, 2n-2]$, la cohomologie L^2 de $\mathcal{O}$ est donnée par*

$$\mathbb{H}^k(\mathcal{O}) \simeq \bigoplus_{i, n_i > 1} \mathbb{H}^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i} \simeq \bigoplus_{i, k > 2n_i - 1, n_i > 1} H^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i}. \tag{6.5}$$

Et en degré $(2n-1)$:

$$\mathbb{H}^{2n-1}(\mathcal{O}) \simeq H^{2n-1}(\mathcal{O}) \simeq \mathbb{R}.$$

En degré $k-1 \in [0, 2n-2]$, la cohomologie L^2_w de $\mathcal{O}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^{k-1}_w(\mathcal{O}) &\simeq \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{H}^{k-2n_i}(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_{i, n_i = 1} \mathbb{H}^{k-1}(Y_i)^{B_i} \\ &\simeq \bigoplus_{i \geq 1, k > 2n_i} H^{k-2n_i}(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_{i, n_i = 1, k > 1} H^{k-1}(Y_i)^{B_i}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

6.4. **Cas des résolutions crépantes.**

6.4.1. *Cas général.* Supposons que $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n/G$ soit une résolution crépante. Nous pouvons dans ce cas donner une description explicite de la cohomologie L^2 de X. En effet, on connaît la cohomologie de X en fonction des classes de conjugaison de G : si $g \in G$ on note $\mathrm{age}(g) = \theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n$ où les valeurs propres de g sont $(e^{i2\pi\theta_1}, e^{i2\pi\theta_2}, ..., e^{i2\pi\theta_n})$ avec $\theta_i \in [0, 1[$, puisque $\det g = 1$ on a forcément $\mathrm{age}(g) \in \mathbb{N} \cap [0, n[$, il est aussi clair que $\mathrm{age}(g)$ ne dépend que de la classe de la conjugaison de g $[g] \in \mathcal{C}(G)$. Les résultats de Y. Ito et M. Reid ($n = 3$) et V. Batyrev et indépendamment J. Denef et F. Loeser sont les suivants ([20, 2, 13]) : la cohomologie de X est nulle en degré impair et en degré pair

$$\dim H^{2k}(X) = \mathrm{card}\{[g] \in \mathcal{C}(G),\ \mathrm{age}(g) = k\}.$$

Notre résultat est le suivant :

Théorème 6.9. *Soit $G \subset \mathrm{SU}(n)$ un sous groupe fini, on suppose que $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ le quotient de la sphère par G soit à singularités isolées. Si $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n/G$ une résolution crépante de $\mathbb{C}^n/G$ équipée d'une métrique QALE asymptote à $\mathbb{C}^n/G$ alors*

$$\mathbb{H}^k(X) \simeq \mathrm{Im}\left(H^k_c(X) \to H^k(X)\right).$$

Démonstration. Nous avons obtenu la suite exacte suivante :
(6.7)

$$H^{k-1}(K) \oplus \mathbb{H}^{k-1}_w(\mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^{k-1}(\partial K) \xrightarrow{\mathrm{b}} \mathbb{H}^k(X) \xrightarrow{\mathrm{r}^*} H^k(K) \oplus \mathbb{H}^k(\mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} H^k(\partial K).$$

Si k est pair : alors puisque les Y_i sont des résolutions crépantes de W_i/A_i, elles n'ont de cohomologie qu'en degré pair ainsi d'après (**??**) et (4.13) on a forcément $\mathbb{H}^k(\mathcal{O}) = \{0\}$; de plus d'après (**??**), on sait que

$$\mathbb{H}^{k-1}_w(\mathcal{O}) = \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{H}^{k-2n_i}(Y_i)^{B_i}$$

et aussi (6.1) :

$$H^{k-1}(\partial K) \simeq \bigoplus_{i \geq 1, k > 2n_i} H^{k-2n_i}(Y_i)^{B_i}.$$

Or lorsque $l > 0$, $\mathbb{H}^l(Y_i) = H^l(Y_i)$, on obtient donc l'isomorphisme :

$$\mathbb{H}^{k-1}_w(\mathcal{O}) \simeq H^{k-1}(\partial K).$$

La suite exacte (6.7) se réduit à :

$$\{0\} \to \mathbb{H}^k(X) \to H^k(K) \to H^k(\partial K),$$

Donc $\mathbb{H}^k(X)$ est isomorphe au noyau de $H^k(K) \to H^k(\partial K)$ qui est exactement l'image de $H^k(K, \partial K) \to H^k(K)$. Puisque X se rétracte sur K, on a bien démontré le résultat.

Si k est impair : dans ce cas on sait $H^k(K) = \{0\}$ et $H^k(K, \partial K) = \{0\}$ donc

$$H^{k-1}(K) \to H^{k-1}(\partial K) \to \{0\} \ .$$

De la suite exacte (6.7), il ne reste que

$$\{0\} \to \mathbb{H}^k(X) \to \mathbb{H}^k(\mathcal{O}) \to H^k(\partial K).$$

Or

$$\mathbb{H}^k(\mathcal{O}) = \bigoplus_{i \geq 1, n_i > 1} \mathbb{H}^{k-2n_i-1}(Y_i)^{B_i}$$

et

$$H^k(\partial K) = \bigoplus_{i \geq 1, k > 2n_i - 1} H^{k-2n_i-1}(Y_i)^{B_i},$$

sauf pour $k = 2n-1$ où $\mathbb{H}^{2n-1}(\mathcal{O}) \simeq \mathbb{H}^{2n-1}(\partial K)$. La dernière flèche de cette suite est donc injective ; la cohomologie L^2 de X est donc nulle. $\square$

On peut étudier maintenant étudier deux cas particuliers :

6.4.2. *le cas particulier où $G \subset \mathrm{SU}(3)$.* On suppose ici que G est un sous groupe fini de $\mathrm{SU}(3)$, alors $\mathbb{C}^3/G$ admet toujours des résolutions crépantes et soit $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^3/G$ l'une d'entre elles. Lorsque $g \in G$, on a forcément

$$\dim \ker(g - \mathrm{Id}) \in \{0, 1, 3\}$$

et donc le lieu singulier de $\mathbb{S}^5/G$ est une réunion disjointes de cercles. En particulier, si $K = \pi^{-1}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{O} = X \setminus K$ alors pour $k \leq 3$: $\mathbb{H}^k(\mathcal{O}) = \{0\}$ et pour $k \geq 3$ $\mathbb{H}^k(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) = \{0\}$. Puisque $d\mathcal{C}^{k-1}_{w,1}(\mathcal{O}) = Z^k(\mathcal{O})$ pour $k \leq 3$, on en déduit facilement que l'application naturelle $H^k_c(X) \to \mathbb{H}^k(X)$ est surjective pour $k \leq 3$. Puisque $\mathcal{O}$ est connexe et que $H^1(\mathcal{O}) = \{0\}$, le lemme (2.1) de [10] montre que cette application est aussi injective pour $k \leq 2$. De plus, puisque pour $k \geq 3$, $\mathbb{H}^k(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) = \{0\}$, le lemme (2.2) de [10]) implique que l'application $\mathbb{H}^k(X) \to H^k(X)$ est injective pour $k \geq 3$; on en déduit immédiatement :

Théorème 6.10. *Soit $G \subset SU(3)$ un sous-groupe fini et $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^3/G$ une résolution crépante, on équipe X d'une métrique QALE alors*

$$\mathbb{H}^k(X) = \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad k \neq 2, 4 \\ H^2_c(X) \simeq \mathrm{Im}(H^2_c(X) \to H^2(X)) & \text{si} \quad k = 2 \\ H^4(X) \simeq \mathrm{Im}(H^4_c(X) \to H^4(X)) & \text{si} \quad k = 4 \end{cases} .$$

En général, pour toute variété (M, g) isométrique au dehors d'un compact avec X alors

$$\mathbb{H}^k(M) = \begin{cases} H^k_c(M) & \text{si} \quad k \leq 2 \\ \mathrm{Im}(H^3_c(M) \to H^3(M)) & \text{si} \quad k = 3 \\ H^k(M) & \text{si} \quad k \geq 4 \end{cases} .$$

On revient au cas de X une résolution crépante de $\mathbb{C}^3/G$:

$$\chi_{L^2}(X) = \sum_{l=0}^{6} (-1)^l \dim \mathbb{H}^l(X) = 2 \dim \mathbb{H}^4(X) = 2 \,\mathrm{card}\{[g] \in \mathcal{C}(G),\ \mathrm{age}(g) = 2\}.$$

Mais on a toujours

$$\mathrm{age}(g) + \mathrm{age}(g^{-1}) = 3 - \dim\ker(g - \mathrm{Id}),$$

ainsi

$$\ker(g - \mathrm{Id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{age}(g) = \mathrm{age}(g^{-1}) = 1$$

et

$$\ker(g - \mathrm{Id}) = \{0\} \Leftrightarrow \{\mathrm{age}(g), \mathrm{age}(g^{-1})\} = \{1, 2\}.$$

On a donc montré le résultat suivant

Corollaire 6.11.

$$\chi_{L^2}(X) = \dim \mathbb{H}^2(X) + \dim \mathbb{H}^4(X) = \mathrm{card}\{[g] \in \mathcal{C}(G),\ \ker(g - \mathrm{Id}) = \{0\}\}.$$

Considérons l'exemple 9.3.5 du livre de D. Joyce : $G \simeq \mathbb{Z}_4$ est le groupe engrendé par $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (-z_1, iz_2, iz_3)$. Si X est la résolution crépante de $\mathbb{C}^3/G$ équipée d'une métrique QALE alors :

$$\dim \mathbb{H}^2(X) = \dim \mathbb{H}^4(X) = 1$$

Si on considère l'exemple 9.3.6 de ce même livre : $G = \mathbb{Z}_2^2$ est le sous groupe de SU(3) formé par les matrices diagonales à entrée $\pm 1\cdot$ Dans ce cas tous les éléments de G fixe au moins une droite de $\mathbb{C}^3$ et donc les résolutions crépantes de $\mathbb{C}^3/G$ ne portent pas de formes harmoniques L^2.

6.4.3. *le cas particulier où $G \subset \mathrm{Sp}(2)$.* Soit donc G un sous groupe fini de Sp(2) et $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n/G$ une résolution crépante[5]. Mais la dimension du noyau d'un élément de G est $0, 2$ ou 4. Puisque que les variétés ALE hyperkählerienne de dimension complexe 2 ne portent des formes harmoniques L^2 qu'en degré 2 et qu'en ce degré la cohomologie L^2 est la cohomologie ordinaire, on obtient que pour

$$k \neq 5, 7\ \mathbb{H}^k(\mathcal{O}) = \mathbb{H}^k_w(\mathcal{O}) = \{0\} \ \text{ et } \ \mathbb{H}^5(\mathcal{O}) = \mathbb{H}^5_w(\mathcal{O}) = \bigoplus_{i \geq 1} H^2(Y_i)^{B_i}.$$

Pour la cohomologie ordinaire de $\mathcal{O}$ on sait que : $H^k(\mathcal{O}) = \{0\}$ pour $k = 3, 4, 6, 8$ et de plus $H^5(\mathcal{O}) = \bigoplus_{i\geq 1} H^2(Y_i)^{B_i} \simeq \mathbb{H}^5(\mathcal{O})$ et aussi $H^7(\mathcal{O}) \simeq \mathbb{H}^7(\mathcal{O})$. Grâce à nos suites exactes de Mayer-Vietoris, on obtient alors facilement : $\mathbb{H}^k(X) = H^k(X)$ dès que $k \geq 4$. En fait cette analyse est valide pour toute variété isométrique au dehors d'un compact avec X, on obtient donc :

Théorème 6.12. *Soit $G \subset \mathrm{Sp}(2)$ un sous-groupe fini et $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^4/G$ une résolution crépante, on équipe X d'une métrique QALE alors*

$$\mathbb{H}^k(X) = \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad k \neq 2, 4, 6 \\ H^2_c(X) \simeq \mathrm{Im}(H^2_c(X) \to H^2(X)) & \text{si} \quad k = 2 \\ H^4(X) \simeq H^4_c(X) \simeq H^4(X) & \text{si} \quad k = 4 \\ H^6(X) \simeq \mathrm{Im}(H^6_c(X) \to H^6(X)) & \text{si} \quad k = 6 \end{cases}.$$

En général, pour toute variété (M, g) isométrique au dehors d'un compact avec X alors

$$\mathbb{H}^k(M) = \begin{cases} H^k_c(M) & \text{si} \quad k \leq 4 \\ H^k(M) & \text{si} \quad k \geq 4 \end{cases}.$$

[5] Cela n'existe pas forcément.

Remarquons que si une résolution crépante de $\mathbb{C}^4/G$ n'existe pas toujours, il existe toujours une résolution crépante de $(\mathbb{C}^4 \setminus \mathbb{B})/G$.

Revenons maintenant au cas d'une résolution crépante de $\mathbb{C}^4/G$. Lorsque $g \in \mathrm{Sp}(2)$ on a de même :

$$\operatorname{age}(g) + \operatorname{age}(g^{-1}) = 4 - \dim\ker(g - \mathrm{Id}).$$

En conséquence on a aussi

$$\dim\ker(g - \mathrm{Id}) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{age}(g) = \operatorname{age}(g^{-1}) = 1.$$

Et puisque $\dim \mathbb{H}^2(X) = \dim \mathbb{H}^6(X) = \operatorname{card}\{[g] \in \mathcal{C}(D), \operatorname{age}(g) = 3\}$ et $\dim \mathbb{H}^4(X) = \dim H^4(X) = \operatorname{card}\{[g] \in \mathcal{C}(D), \operatorname{age}(g) = 2\}$, on obtient encore :

Corollaire 6.13.

$$\begin{aligned}\chi_{L^2}(X) &= \dim \mathbb{H}^2(X) + \dim \mathbb{H}^4(X) + \dim \mathbb{H}^6(X)\\ &= \operatorname{card}\{[g] \in \mathcal{C}(G),\ \ker(g - \mathrm{Id}) = \{0\}\}.\end{aligned}$$

Étudions maintenant les exemples du livre de D. Joyce : le premier (exemple 9.3.9) est le schéma de Hilbert de 3 points sur $\mathbb{C}^2$. Dans ce cas G est le groupe S_3 des permutations de $\{1, 2, 3\}$ agissant sur $\{(x, y, z) \in (\mathbb{C}^2)^3, x+y+z = 0\} \simeq \mathbb{C}^4$. Ce schéma de Hilbert de 3 points sur $\mathbb{C}^2$ peut être muni d'une métrique hyperkählerienne QALE et alors la variété obtenue ne porte de formes harmoniques L^2 qu'en degré 4 où cet espace est de dimension 1.

Le deuxième exemple est en fait le schéma de Hilbert de 2 points sur une surface hyperkählerienne ALE, le groupe G en question est le produit semi-direct de $\mathbb{Z}_2$ avec le produit $H \times H$ où H est un sous-groupe fini de $\mathrm{SU}(2) = \mathrm{Sp}(1)$. Dans ce cas si Y est la résolution crépante de $\mathbb{C}^2/H$, ce Schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^2(Y)$ ne porte de formes harmoniques L^2 qu'en degré 4 et

$$\dim \mathbb{H}^4(\mathrm{Hilb}^2(Y)) = \frac{b_2(Y)(b_2(Y) + 1)}{2}.$$

6.5. **Le cas général.** Nous allons maintenant donner une interprétation topologique des espaces de formes harmoniques L^2 des variétés QALE. La réponse est ici moins lisible que pour les résolutions crépantes car on ne connaît pas la cohomologie des résolutions localement en produit de $\mathbb{C}^n/G$. Soit donc X une variété QALE asymptote à $\mathbb{C}^n/G$ où G est un sous groupe de $\mathrm{SU}(n)$ tel que $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ soit à singularités isolés. Nos résultats précédents impliquent que la suite exacte courte suivante est valide :

$$H^{k-1}(K) \oplus \mathbb{H}_w^{k-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^{k-1}(\partial K) \xrightarrow{\mathrm{b}} \mathbb{H}^k(X) \xrightarrow{\mathrm{r}^*} H^k(K) \oplus \mathbb{H}^k(\mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} H^k(\partial K).$$

On peut déjà déterminer la cohomologie L^2 de X en degré 1 : nous avons en effet $\mathbb{H}_w^0(\mathcal{O}) = \{0\}$ et

$$\mathbb{H}^1(\mathcal{O}) = \bigoplus_{1 > 2n_i - 1, n_i > 1} \mathbb{H}^{2-2n_i}(Y_i) = \{0\}\ ;$$

On conclut comme dans la preuve du théorème (4.11) que

$$\mathbb{H}^1(X) \simeq H_c^1(X).$$

De la même façon, nous obtenons :

$$\mathbb{H}^{2n-1}(X) \simeq H^{2n-1}(X).$$

On va grâce à cette suite interpréter $\mathbb{H}^k(X)$ à l'aide de la cohomologie d'un sous complexe de $C^\infty(\Lambda^k T^*K)$. Notons

$$Y = \bigcup_{i, n_i > 1} Y_i/B_i$$

et

$$Y_P = \bigcup_i Y_i/B_i \cup \bigcup_{i, n_i = 1} (Y_i \times \mathbb{S}_{V_i})/B_i$$

on dispose d'applications

$$f \,:\, Y \to \partial K \subset K \;\text{ et }\; f_P \,:\, Y_P \to \partial K \subset K.$$

On note $H^\bullet(K, \ker f^*)$ (resp. $H^\bullet(K, \ker f_P^*)$) la cohomologie du sous complexe de $C^\infty(\Lambda^\bullet T^*K)$ formé par les formes nulles lorsqu'elle sont tirées en arrière par f (resp. f_P). Notre résultat est le suivant :

Proposition 6.14. *Pour $k \in [3, 2n-2]$, nous avons l'isomorphisme*

$$\mathbb{H}^k(X) \simeq \operatorname{Im}\left(H^k(K, \ker f_P^*) \to H^k(K, \ker f^*)\right).$$

Démonstration. Soit $U \simeq [0, 1[\times \partial K$ un voisinage tubulaire de ∂K dans $\bar{\mathcal{O}}$, le bord de U est constitué de deux copies de K, on suppose que le bord de $D := K \cup U$ est $\{1\} \times \partial K$, on peut aussi considérer les applications $f \,:\, Y \to \partial D$ et $f_P \,:\, Y_P \to \partial D$ et on a évidemment :

$$H^k(D, \ker f^*) \simeq H^k(K, \ker f^*) \;\text{ et }\; H^k(D, \ker f_P^*) \simeq H^k(K, \ker f_P^*).$$

On peut aussi calculer la cohomologie du complexe des formes différentielles sur U dont le tiré en arrière par f (ou par f_P) de leur restriction à $\{1\} \times \partial K$ est nulle. En effet, on dispose des suites exactes :

$$H^{k-1}(U) \to H^{k-1}(Y) \to H^k(U, \ker f^*) \to H^k(U) \to H^k(Y) \tag{6.8}$$

$$H^{k-1}(U) \to H^{k-1}(Y_P) \to H^k(U, \ker f_P^*) \to H^k(U) \to H^k(Y_P). \tag{6.9}$$

Notre calcul de la cohomologie de U (6.1) pour les degrés $k \in [1, 2n-2]$

$$H^k(U) \simeq \bigoplus_{i, k > 2n_i - 1} H^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_i H^k(Y_i)^{B_i}$$

et les isomorphismes

$$H^k(Y) = \bigoplus_{i, n_i > 1} H^k(Y_i)^{B_i} \;\text{ et }\; H^k(Y_P) = \bigoplus_{i, n_i = 1} H^{k-1}(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_i H^k(Y_i)^{B_i}$$

impliquent que la première flèche de la suite (6.8) est surjective dès que $k \geq 2$ ainsi dans ces degrés :

$$\begin{aligned} H^k(U, \ker f^*) &\simeq \ker\left(H^k(U) \to H^k(Y)\right) \\ &\simeq \bigoplus_{i, k > 2n_i - 1} H^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i} \oplus \bigoplus_{i, n_i = 1} H^k(Y_i)^{B_i} \end{aligned} \tag{6.10}$$

De même pour $k \geq 3$, la première flèche de la suite (6.9) est surjective, on obtient donc pour $k \in [3, 2n-2]$:

$$\begin{aligned} H^k(U, \ker f_P^*) &\simeq \ker\left(H^k(U) \to H^k(Y_P)\right) \\ &\simeq \bigoplus_{i, k > 2n_i - 1, n_i > 1} H^{k-2n_i+1}(Y_i)^{B_i} \end{aligned} \tag{6.11}$$

Mais on sait que pour $k \neq 0$ alors $\mathbb{H}^k(Y_i) = H^k(Y_i)$. Ainsi si on compare (6.11) avec (6.8, i)) on obtient pour $k \in [3, 2n-2]$:

$$\mathbb{H}^k(\mathcal{O}) \simeq H^k(U, \ker f_P^*) \tag{6.12}$$

et en comparant (6.10) avec (6.8, ii)), on obtient pour $k \in [3, 2n-2]$:

$$\mathbb{H}_w^{k-1}(\mathcal{O}) \simeq H^{k-1}(U, \ker f^*). \tag{6.13}$$

Puisque $Y \subset Y_P$ nos obtenons le diagramme commutatif suivant où les flèches horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^{k-1}(K) \oplus H^{k-1}(U, \ker f_P^*) & \longrightarrow & H^{k-1}(U) & \longrightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & H^{k-1}(K) \oplus H^{k-1}(U, \ker f^*) & \longrightarrow & H^{k-1}(U) & \longrightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & H^k(D, \ker f_P^*) & \longrightarrow & H^k(K) \oplus H^k(U, \ker f_P^*) & \longrightarrow & H^k(U) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\longrightarrow & H^k(D, \ker f^*) & \longrightarrow & H^k(K) \oplus H^k(U, \ker f^*) & \longrightarrow & H^k(U)
\end{array}$$

De plus nos calculs montrent que la première et la quatrième flèches verticales sont injectives et les deuxième et dernière flèches verticales sont des isomorphismes. Alors on se sert du lemme suivant qu'on montrera un peu plus loin :

Lemme 6.15. *Dans le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E'
\end{array}$$

on suppose que les flèches horizontales sont exactes, que les quatrième et dernière flèches verticales sont injectives et que la deuxième flèche verticale est surjective alors la suite suivante est exacte :

$$A' \to B' \simeq \mathrm{Im}(B \to B') \to \mathrm{Im}(C \to C') \to D \simeq \mathrm{Im}(D \to D') \to E \simeq \mathrm{Im}(E \to E').$$

Pour en déduire que la suite suivante est exacte :

$$H^{k-1}(K) \oplus H^{k-1}(U, \ker f^*) \to H^{k-1}(U) \to$$
$$\to \mathrm{Im}\left[H^k(D, \ker f_P^*) \to H^k(D, \ker f^*)\right] \to H^k(K) \oplus H^k(U, \ker f_P^*) \to H^k(U)$$

En comparant cette suite exacte à notre suite exacte :

$$H^{k-1}(D) \oplus H_w^{k-1}(\mathcal{O}) \to H^{k-1}(U) \to \mathbb{H}^k(X) \to H^k(D) \oplus \mathbb{H}^k(\mathcal{O}) \to H^k(U),$$

à l'aide des isomorphismes (6.12,6.13), on en déduit l'isomorphisme voulu. $\square$

Prouvons maintenant le lemme (6.15).

Démonstration. Donnons des noms aux différentes flèches de ce diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_0"] & B \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_1"] & C \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "f_2"] & D \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "f_3"] & E \arrow[d, "f_4"] \\ A' \arrow[r, "\varphi'_1"] & B' \arrow[r, "\varphi'_2"] & C' \arrow[r, "\varphi'_3"] & D' \arrow[r, "\varphi'_4"] & E' \end{tikzcd}$$

Puisque f_4 est injectif, nous avons :

$$\ker f_4 \circ \varphi_4 = \ker \varphi_4 = \ker \varphi'_4 \circ f_3$$

et donc

$$\ker \varphi'_4 \cap \operatorname{Im} f_3 = f_3(\ker \varphi_4) = f_3(\operatorname{Im} \varphi_3) = \operatorname{Im} \varphi'_3 \circ f_2.$$

Ceci montre l'exactitude de la dernière flèche.

Remarquons que puisque f_1 est surjectif, l'image de φ'_2 est forcement incluse dans l'image de f_2, elle est en fait égale à l'image de $f_2 \circ \varphi_2$. Et donc de la suite exacte $A' \to B' \to C'$, on en extrait la suite exacte $A' \to B' \to \operatorname{Im} f_2$.

Nous obtenons également :

$$\ker \varphi'_3 \cap \operatorname{Im} f_2 = f_2(\ker \varphi_3) = f_2(\operatorname{Im} \varphi_2) = \operatorname{Im} \varphi'_2 \circ f_1 = \operatorname{Im} \varphi'_2.$$

□

Il ne reste que le cas de degré 2. Dans ce cas, on sait aussi que

$$\mathbb{H}^1_w(\mathcal{O}) = \bigoplus_{i, n_i = 1} \mathbb{H}^1(Y_i)^{B_i} \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^2(\mathcal{O}) = \bigoplus_{i, 3-2n_i > 1, n_i > 1} \mathbb{H}^{3-2n_i}(Y_i)^{B_i} = \{0\}.$$

Si pour chaque i, on considère un point $p_i \in \mathbb{S}_{V_i}$, alors un petit calcul montre que la cohomologie de U relative à $Z = \partial K \setminus (\bigcup_{i, n_i = 1} (Y_i \times \{B_i.p_i\})/B_i)$ vaut en degré 1 :

$$H^1(U, Z) = \bigoplus_{i, n_i = 1} H^1(Y_i)^{B_i}.$$

Les mêmes arguments montrent à l'aide du lemme (6.15) que

$$\mathbb{H}^2(X) \simeq \operatorname{Im}\left[H^2(K, \partial K) \to H^2(K, Z)\right].$$

Ainsi nous avons obtenu :

Théorème 6.16. *Soit (X, g) une variété QALE asymptote à $\mathbb{C}^n/G$ où $G \subset \mathrm{SU}(n)$ telle que les singularités de $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ soient isolées alors*

$$\mathbb{H}^k(X) \simeq \begin{cases} H^k(K, \partial K) \simeq H^k_c(X) & \text{si } k \leq 1 \\ \operatorname{Im}\left(H^2(K, \partial K) \to H^2(K, Z)\right) & \text{si } k = 2 \\ \operatorname{Im}\left(H^k(K, \ker f^*_P) \to H^k(K, \ker f^*)\right) & \text{si } k \in [3, 2n-2] \\ H^k(K) \simeq H^k(X) & \text{si } k \geq 2n-1 \end{cases}$$

Si de plus la dimension des singularités de $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ est supérieure ou égale à 3 *alors :*

$$\mathbb{H}^k(X) \simeq \begin{cases} H^k(K, \partial K) \simeq H^k_c(X) & \text{si } k \leq 2 \\ H^k(K, \ker f^*) & \text{si } k \in [3, 2n-2] \\ H^k(K) \simeq H^k(X) & \text{si } k \geq 2n-2 \end{cases}$$

6.6. **Cohomologie L^2 à poids.** Si on considère le poids μ tel que $\mu = \|x\|^{2a}$ en dehors d'un compact, alors nous pouvons également déterminer la cohomologie L^2 à poids des variétés QALE asymptotes à $\mathbb{C}^n/G$ où les singularités de $\mathbb{S}^{2n-1}/G$ sont isolés, lorsque $a > n$, on trouve

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) \simeq H^k_c(X)$$

et pour $a < -n$, nous obtenons

$$\mathbb{H}^k_\mu(X) \simeq H^k(X).$$

Références

[1] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **77** (1975), 43–69.

[2] V. Batyrev, Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs, *J. Eur. Math. Soc.* **1** (1999), 5–33.

[3] A.Borel, L^2 cohomology and intersection cohomology of certain arithmetic varieties, Emmy Noether in Bryn Mawr (Bryn Mawr, Pa. 1982), Springer, New-York, 1983, 119–131.

[4] A.Borel, W. Casselman, Cohomologie d'intersection et L^2 cohomologie des variétés arithmétiques de rang rationnels 2, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985) no 7, 369–373.

[5] J.Brüning, M. Lesch, Hilbert complexes. *J. Funct. Anal.* **108** (1992), no. 1, 88–132.

[6] J. Cao, F. Xavier, Kähler parabolicity and the Euler number of compact manifolds of non-positive sectional curvature. *Math. Ann.* **319** (2001), no. 3, 483–491.

[7] G. Carron, L^2-cohomologie et inégalités de Sobolev, *Math. Ann.* **314** (1999), no. 4, 613–639.

[8] G. Carron, Théorèmes de l'indice sur les variétés non-compactes, *J. Reine Angew. Math.*, **541** (2001), 81-115.

[9] G. Carron, L^2-cohomology of manifolds with flat ends, *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 2, 366–395.

[10] G. Carron, L^2 cohomologie et parabolicité, *the Journal of Geometric Analysis*, **15** (2005), no. 3, 391–404.

[11] J. Cheeger, On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds. Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), pp. 91–146, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[12] E.B. Davies, A review of Hardy inequalities. The Maz'ya anniversary collection, Vol. 2 (Rostock, 1998), 55–67, *Oper. Theory Adv. Appl.*, **110**, Birkhäuser, Basel, 1999.

[13] J. Denef, F. Loeser, Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence. *Compositio Math.* **131** (2002), no. 3, 267–290.

[14] M. Gromov, Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory, *J. Differential Geom.*, **33** (1991), 263-292.

[15] T. Hausel, E. Hunsicker, R. Mazzeo, Hodge cohomology of gravitational instantons, *Duke Math. J.* **122** (2004), no. 3, 485–548.

[16] N. Hitchin, L^2-cohomology of hyperkähler Quotient, *Comm. Math. Phys.* **211** (2000), 153–165.

[17] L. Hörmander, L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator, *Acta Math.*, **113**(1965), 89-152.

[18] L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London (1966).

[19] L. Hörmander, the Analysis of linear partial differential operators. III. Springer-Verlag de Berlin (1994) Grundlehren der mathematischen wissenschaften 274.

[20] Y.Ito, M. Reid, The McKay correspondence for finite subgroups of SL$(3, \mathbb{C})$. Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994), 221-240, de Gruyter, Berlin, 1996.

[21] J.Jost, K. Zuo, Vanishing theorems for L^2-cohomology on infinite coverings of compact Kähler manifolds and applications in algebraic geometry, *Comm. Anal. Geom.* **8** (2000), no. 1, 1–30.

[22] D. Joyce, Compact manifolds with special holonomy, Oxford University Press (2000) Oxford Mathematical Monographs.

[23] P. Li, On the structure of complete Kähler manifolds with nonnegative curvature near infinity, *Invent. Math.* **99** (1990), no. 3, 579–600.

[24] E. Looijenga, L^2-cohomology of locally symmetric varieties, *Compositio Math.* **67** (1998), 3–20.

[25] J. Lott, L^2-cohomologie of geometrically infinite hyperbolic 3-Manifold, *Geom. Funct. Anal.* **7**(1997), 81–119.

[26] J. McNeal, L^2 harmonic forms on some complete Kähler manifolds, *Math. Ann* **. 323** (2002), no. 2, 319–349.

[27] R. Mazzeo, The Hodge cohomology of a conformally compact metric, *J. Differential Geom.*, **28 n°2** (1988), 309-339.

[28] R. Mazzeo, R. Melrose, Pseudodifferential operators on manifolds with fibred boundaries, in "*Mikio Sato : a great Japanese mathematician in the twentieth century*", *Asian. J. Math.* **2**, (1998), n0 4,833-866.

[29] R. Mazzeo, R. S. Phillips, Hodge theory on hyperbolic manifolds, *Duke Math. J.* **60 n°2** (1990), 509-559.

[30] R. Mazzeo, A. Vasy, Resolvents and Martin boundaries of product spaces. *Geom. Funct. Anal.* **12** (2002), no. 5, 1018–1079.

[31] R. Melrose, Spectral and scattering theory for the Laplacian on asymptotically Euclidean spaces. Ikawa, Mitsuru (ed.), Spectral and scattering theory. Proceedings of the Taniguchi international workshop, held at Sanda, Hyogo, Japan. Basel : Marcel Dekker. Lect. Notes Pure Appl. Math. **161** ,(1994), 85-130.

[32] H. Nakajima, Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[33] N. Nekrasov, A. Schwarz, Instantons on noncommutative $\mathbb{R}^4$, and $(2,0)$ superconformal six-dimensional theory. *Comm. Math. Phys.* **198** (1998), no. 3, 689–703.

[34] B. Opic, A. Kufner, Hardy-type inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 219. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.

[35] L. Saper, M. Stern, L_2-cohomology of arithmetic varieties, *Ann. Math.* **132** (1990) No.1, pp 1-69.

[36] G. Segal, A. Selby, The cohomology of the space of magnetic monopoles. *Comm. Math. Phys.* **177** (1996), no. 3, 775–787.

[37] A. Sen , Dyon-monopole bound states, selfdual harmonic forms on the multi-monopole moduli space and $Sl(2, \mathbb{Z})$-invariance of string theory, *Phys. Lett.* **B. 329** (1994) 217–221.

[38] N. Teleman, Combinatorial Hodge theory and signature operator. *Invent. Math.* **61** (1980), no. 3, 227–249.

[39] N. Yeganefar, Sur la L^2-cohomologie des variétés à courbure négative, *Duke Math. J.* **122** (2004), no. 1, 145–180.

[40] S. Zucker, L_2 cohomology of Warped Products and Arithmetic Groups, *Inventiones Math.*, **70** (1982), 169-218.

[41] S. Zucker, L_2 cohomology and intersection homology of locally symmetric varieties, II, *Compositio Math.* **59** (1986], 339–398.

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (UMR 6629), Université de Nantes, 2, rue de la Houssinière, B.P. 92208, 44322 Nantes Cedex 3, France

E-mail address: `Gilles.Carron@math.univ-nantes.fr`